Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Ricerca del Dominio della funzione:
La condizione di esistenza è $x \neq -1$, per cui:

$$D_f = \{\forall x \in R : x \neq -1\}$$

oppure in termini d'intervallo:

$$]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]-1,\ +\infty[$$

la funzione non presenta alcuna simmetria.

Limiti agli estremi del Dominio e ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}} = e \qquad \Rightarrow \text{ y=e} \quad \text{Asintoto orizzontale completo}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = e^{\frac{-2}{0^-}} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \Rightarrow \text{ x=-1} \quad \text{Asintoto verticale sinistro}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = e^{\frac{-2}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+$$

pertanto la funzione per x=-1 presenta una discontinuità di 2° specie.

Positività della funzione ed intersezione con gli assi:

$$f(x) \succ 0 \qquad \forall x \in D$$

ciò significa che il grafico della funzione si svolgerà tutto al di sopra dell'asse delle ascisse e non lo incontrerà :L'intersezione con l'asse delle ordinate è $\left(0\ ,\ \frac{1}{e}\right)$

Ricerca della monotonia dei massimi e dei minimi:

Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$f^{'}(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \frac{2}{(x+1)^2}$$

che risulta positiva $\forall x \in D$
pertanto la funzione è sempre crescente per $x \prec -1 \vee x \succ -1$
e non presenta né minimi né massimi.

<u>Ricerca della concavità e dei flessi:</u>

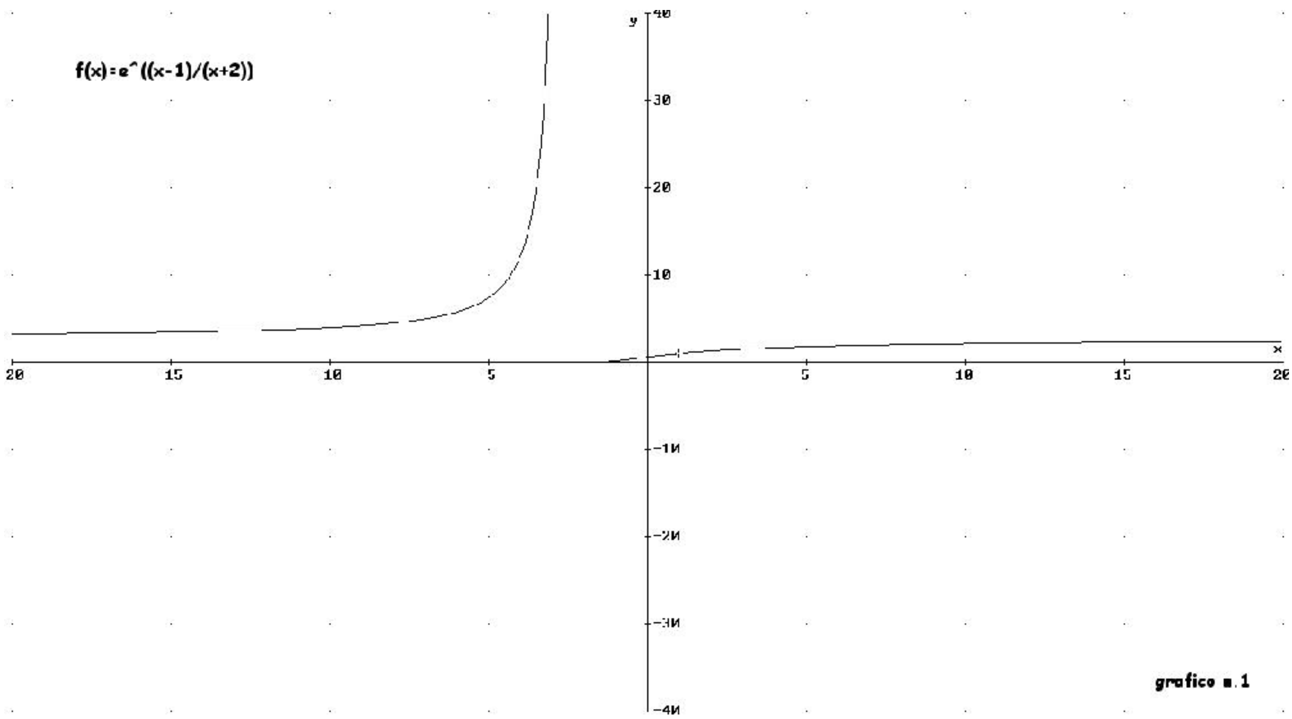
$$f^{''}(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \left(\frac{2}{(x+1\ )^2} \right)^2 + e^{\frac{x-1}{x+1}} \frac{-4}{(x+1)^3} = e^{\frac{x-1}{x+1}} \left[\frac{4}{(x+1)^4} - \frac{4}{(x+1)^3} \right] = e^{\frac{x-1}{x+1}} \left[\frac{4-4x+4}{(x+1)^4} \right] = 4e^{\frac{x-1}{x+1}} \left[\frac{2-x}{(x+1)^4} \right]$$

dove $4e^{\frac{x-1}{x+1}} \left[\frac{1}{(x+1)^4} \right] \succ 0 \qquad \forall x \in D$

pertanto il segno della derivata seconda dipende solo dal numeratore:

$$2 - x \succ 0 \quad \Rightarrow \quad x \prec 2$$

La funzione volge la concavità verso l'alto per $x \prec -1$ e $-1 \prec x \prec 2$, mentre volge la concavità verso il basso altrove. La funzione presenta un flesso nel punto: $\left(2\ ,\sqrt[3]{e}\right)$.
Tutti gli elementi determinati per via analitica sono rappresentati nel grafico n.1



Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

Studiare la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{|1+x|}$$

Osservato che:

$$|1+x| \geq 0 \qquad \forall x \in R$$

il dominio è proprio R.

<u>Limiti agli estremi del Dominio e ricerca degli asintoti:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \mp\infty$$

La funzione non presenta asintoti di alcun genere.

Riscriviamo la funzione senza il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{1+x} & \text{per } x \geq -1 \\ x - \sqrt{-1-x} & \text{per } x \prec -1 \end{cases}$$

<u>Si consideri il ramo per $x \geq -1$:</u>

Derivando:

$$f' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}}$$

il segno della derivata prima dipende dalla seguente disequazione:

Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$2\sqrt{1+x}-1 \succ 0 \qquad \sqrt{1+x} \succ \frac{1}{2} \qquad 1+x \succ \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow x \succ -\frac{3}{4}$

ovviamente questo risultato indica che nel ramo considerato c'è la presenza di un minimo relativo di coordinate $\left(-\frac{3}{4},-\frac{5}{4}\right)$,

si osservi inoltre che:

$$\lim_{x\to -1^+} f^{'}(x) = -\infty$$

Si consideri la derivata seconda:

$$f^{''}(x) = \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$$

ovviamente positiva nell'intervallo considerato, pertanto il ramo volgerà la concavità verso l'alto e non presenterà alcun flesso.

Si consideri il ramo per $x \prec$ -1:

La derivata prima è:

$$f^{'}(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{-1-x}}$$

ovviamente positiva nell'intervallo

$$\left]-\infty,\ -1\right[$$

e pertanto sempre crescente,si osservi inoltre che:

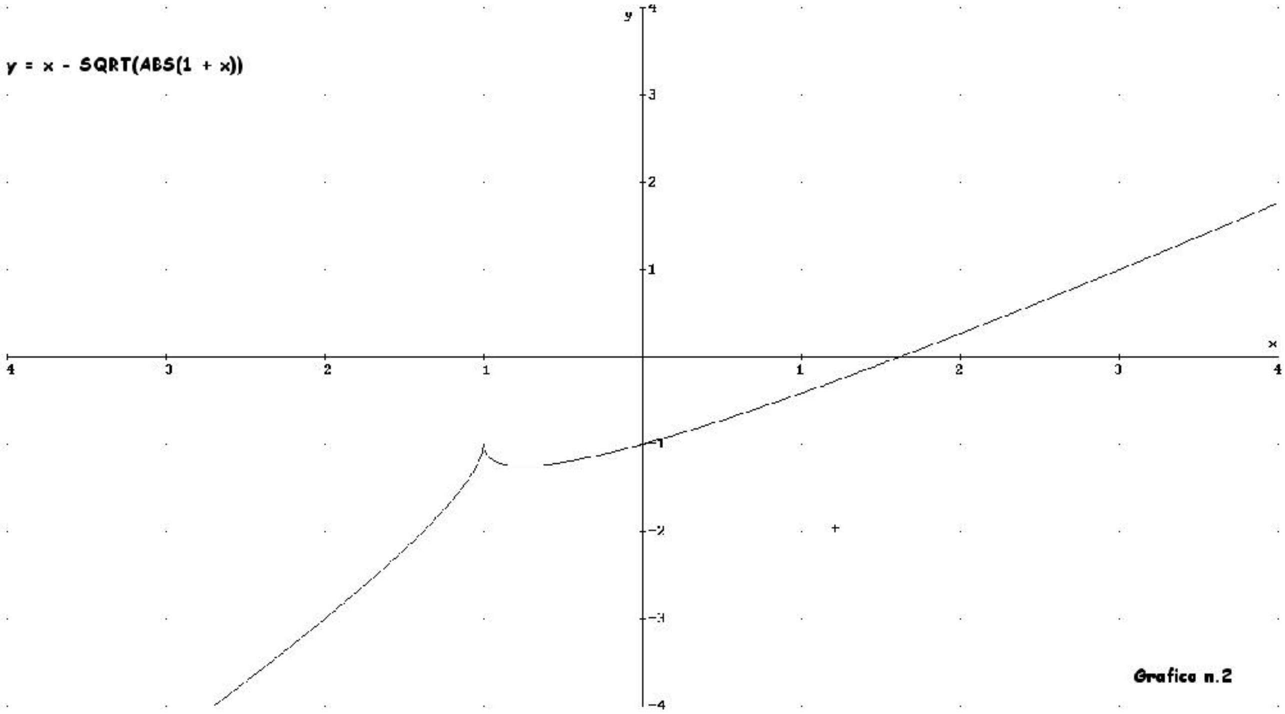
$$\lim_{x\to -1^-} f^{'}(x) = +\infty$$

Si calcoli la derivata seconda:

$$f^{''}(x) = \frac{1}{4\sqrt{(-1-x)^3}}$$

essa risulta sempre positiva e pertanto questo ramo volgerà la concavità verso l'alto. Infine, bisogna osservare che il punto cuspidale (-1 , -1) è anche un punto di massimo relativo anche se la derivata non esiste.

Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it


y = x - SQRT(ABS(1 + x))
Grafica n.2

Studiare la funzione:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

Dominio $\forall x \in R$,
poiché:

$$f(x) = f(-x)$$

la funzione è pari.
Lo studio sarà condotto sull'intervallo $[0, +\infty[$.
L'altro ramo sarà ottenuto in base alla nota simmetria con l'asse delle ordinate.

<u>Limiti agli estremi della restrizione e ricerca degli asintoti:</u>

f(0)=1

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
non presenta alcun asintoto.

<u>Positività della funzione ed intersezione con gli assi:</u>
Poiché la funzione risulta non negativa (il radicando è un quadrato). La funzione risulta nulla nei punti in cui si annulla il radicando cioè in (1, 0) punto di minimo assoluto.

<u>Ricerca della monotonia dei massimi e dei minimi:</u>

La derivata prima è:

$$f'(x)=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

positiva per $x \succ 1$ e quindi ivi la funzione risulterà crescente, negativa altrove nella restrizione e quindi la funzione risulterà decrescente per $0 \prec x \prec 1$.
Pertanto si ha:

M(0, 1) e m(1, 0)

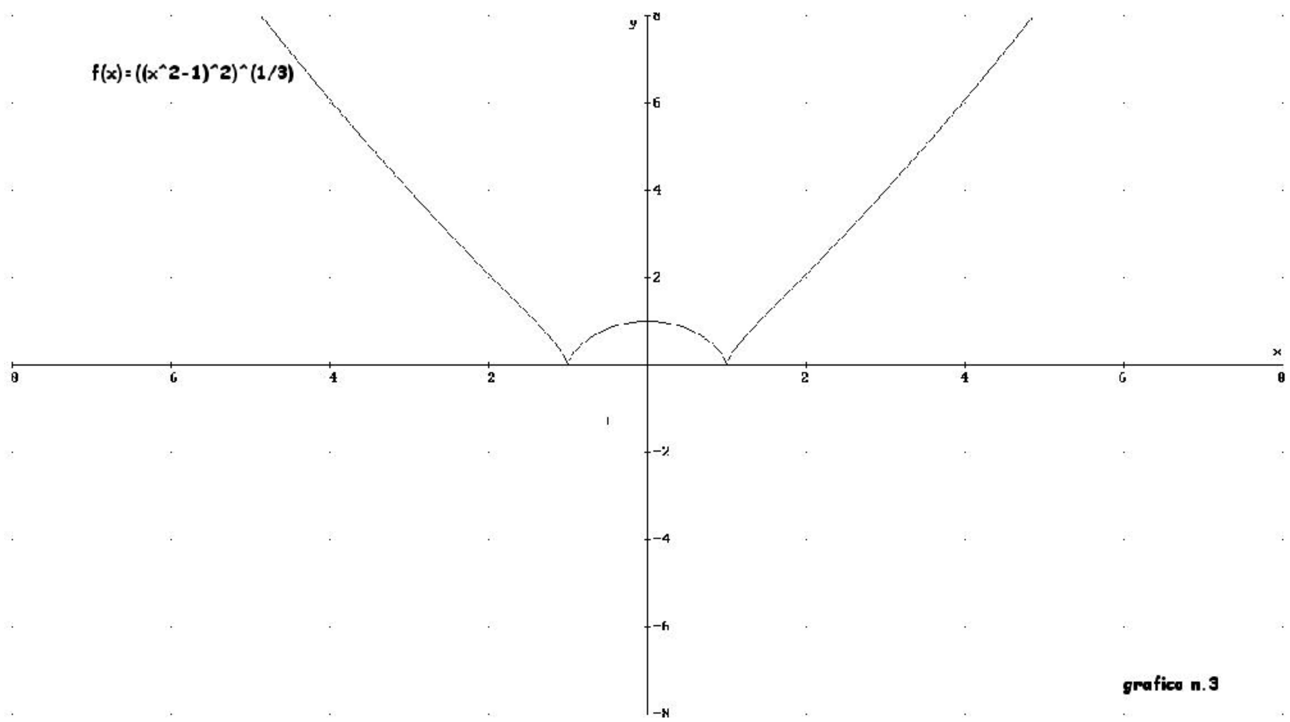
<u>Ricerca della concavità e dei flessi:</u>

La derivata seconda è:

Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$f''(x)=\frac{12\sqrt[3]{x^2-1}-\dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\frac{4(x^2-3)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

dallo studio del segno risulta che volge la concavità verso il basso per:
$0 \prec x \prec \sqrt{3}$
mentre verso l'alto per:
$x \succ \sqrt{3}$
e quindi si ha un flesso nel punto $\left(\sqrt{3},\sqrt[3]{4}\right)$.
Infine c'è da segnalare che il punto di minimo (1, 0) è un punto di cuspide in quanto la derivata dalla destra tende a + ∞ e la derivata dalla sinistra a -∞.
L'altro ramo sarà ottenuto ribaltando di 180° gradi attorno l'asse delle ordinate.
Il grafico e il n.3.



Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

Studiare la funzione:

$$f(x) = x^3 \ln x$$

La condizione di esistenza è che x sia strettamente positiva il Dominio quindi è:
$]\ 0,\ +\infty\ [$.

Limiti agli estremi del dominio e ricerca degli asintoti:

$\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

il limite presenta la forma indeterminata $\infty.0$

Si procede ad un cambio di variabile:

$$\text{posto } \frac{1}{x} = t \quad \text{per } x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad t \to +\infty$$

nella nuova variabile il limite è:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t^{-1}}{t^3} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{\ln t}{t^3} = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 \ln x = +\infty$

La funzione non presenta alcun asintoto.

Positività della funzione ed intersezione con gli assi:

Poiché x^3 è sempre positivo nel dominio il segno dipende da $\ln x$, pertanto nell'intervallo
$]\ 1,\ +\infty\ [$ f(x) è positiva ,
per $x \in]0,1[$ f(x) è negativa

il grafico della funzione si svolgerà tutto al di sopra dell'asse delle ascisse per $x \succ 1$.
L'intersezione con l'asse dell'ascisse è $(1\ ,\ 0)$.
Non c'è intersezione con l'asse delle ordinate perché per x=0 la funzione non è definita.

Ricerca della monotonia dei massimi e dei minimi:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$$

che risulta positiva per $3\ln x + 1 \succ 0$ $\ln x \succ -\frac{1}{3}$ cioè $x \succ e^{-\frac{1}{3}}$ o $x \succ \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ intervallo in cui la funzione è crescente (decrescente per $0 \prec x \prec \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$) pertanto il punto $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, -\frac{1}{3e}\right)$ è di minimo assoluto.

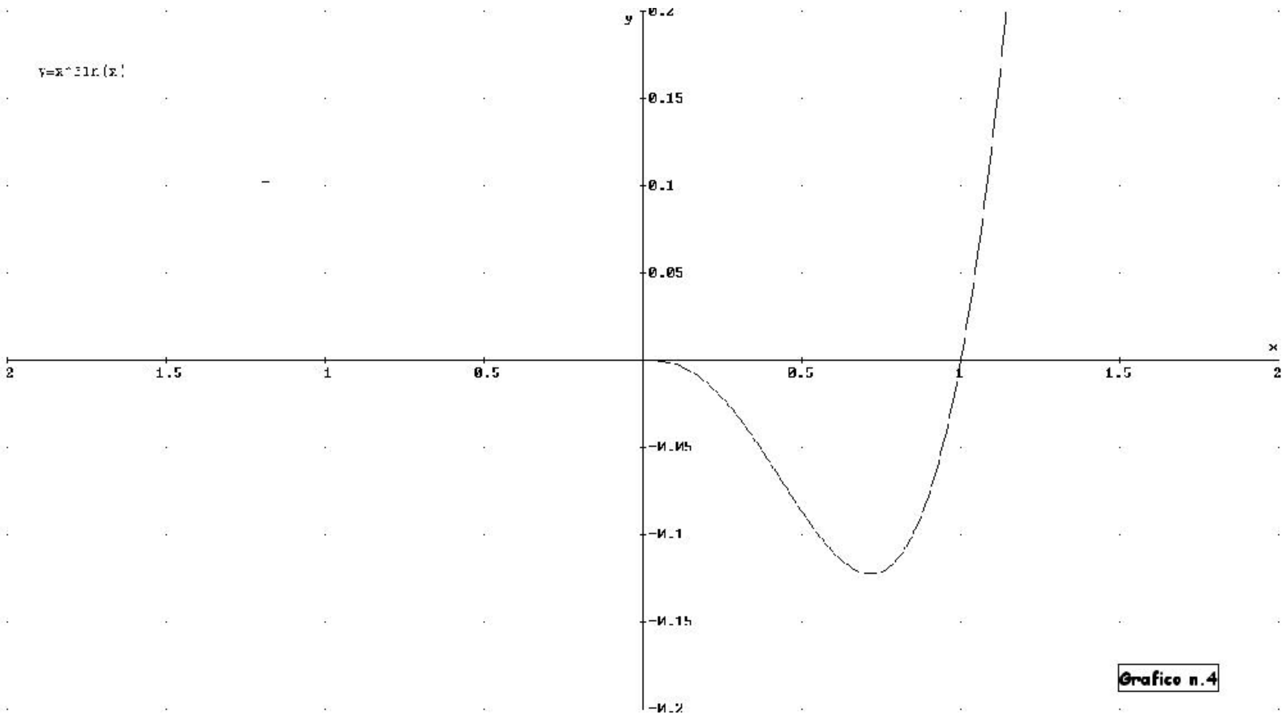
<u>Ricerca della concavità e dei flessi:</u>

$f''(x) = 6x\ln x + 5x = x(6\ln x + 5)$

poiché x è sempre positiva nel dominio il segno della derivata seconda dipende dalla seguente disequazione logaritmica:

$6\ln x + 5 \succ 0$ $\ln x \succ -\frac{5}{6}$ cioè $x \succ e^{-\frac{5}{6}}$ concludendo la funzione presenta concavità verso l'alto per l'intervallo $\left]e^{-\frac{5}{6}}, +\infty\right[$ verso il basso nell'intervallo $\left]0, e^{-\frac{5}{6}}\right[$ per cui per x= $e^{-\frac{5}{6}}$ la funzione presenta flesso.

La funzione è rappresentata nel grafico è il n. 4.



Studiare la funzione

$$f(x) = x\,e^{\frac{2+x}{2-x}}$$

Per determinare il dominio della funzione basta porre $2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, ovvero in termini d'intervallo: $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
La funzione risulta positiva per x positivo e negativa per x negativo,pertanto passa per l'origine.

Condizioni agli estremi del dominio e ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 \qquad \text{asintoto verticale sinistro}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{1}{e}x\right) = \lim_{x\to\infty} xe^{-1}\left(e^{\frac{2+x}{2-x}+1} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} xe^{-1}\left(e^{\frac{4}{2-x}} - 1\right)$$

pongo $\quad x=\frac{1}{t}$ per $x \to \infty$ succede che $t \to 0$.

Nella nuova variabile il limite diventa:

$$\lim_{t\to0} e^{-1}\frac{e^{\frac{4}{2-\frac{1}{t}}} - 1}{t} = \lim_{t\to0} e^{-1}\frac{e^{\frac{4t}{2t-1}} - 1}{t} = \lim_{t\to0} e^{-1}\frac{1}{t}\frac{4t}{2t-1}\frac{e^{\frac{4t}{2t-1}} - 1}{\frac{4t}{2t-1}} = -4e^{-1}$$ indi la funzione è

dotata di asintoto obliquo:

$$y = \frac{1}{e}x - \frac{4}{e}$$

Ricerca della monotonia e massimi e minimi:

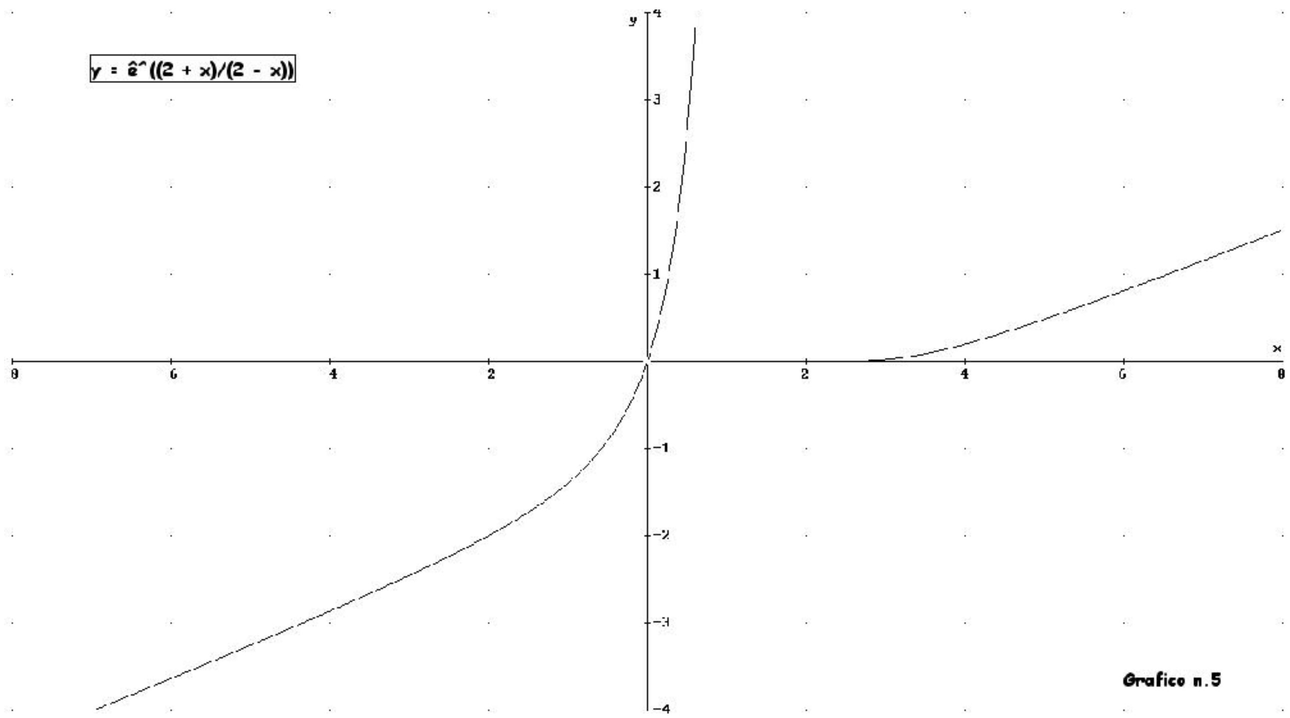
$$f^{'}(x) = e^{\frac{2+x}{2-x}} + x\, e^{\frac{2+x}{2-x}} \frac{4}{(2-x)^2} = e^{\frac{2+x}{2-x}}(1 + \frac{4}{(2-x)^2}) = e^{\frac{2+x}{2-x}}(\frac{4+x^2}{(2-x)^2})$$

essa risulta sempre positiva nel dominio, pertanto la funzione è sempre crescente non presenta né minimi né massimi.

Ricerca della concavità e dei flessi:

$$f^{''}(x) = e^{\frac{2+x}{2-x}}(\frac{4+x^2}{(2-x)^2})^2 + e^{\frac{2+x}{2-x}}\left[\frac{2x(2-x)^2 + (4+x^2)2(2-x)}{(2-x)^4}\right] = e^{\frac{2+x}{2-x}}\frac{x^4 + 4x^2 + 32}{(2-x)^4}$$

la derivata seconda è palesemente positiva , quindi la funzione volgerà la concavità verso l'altro sempre e non presenta flessi.
Il grafico è:



Autore: ekd Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it