# Studio di funzioni-esercizi svolti

1. Studiare la funzione:

$$y = \log_{1/2}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)$$

## Dominio

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2+1} > 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} x-2>0 \\ x^2+1>0 \end{cases} \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} x>2 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$D: (2;\ +\infty)$$

## Intersezione con gli assi

$f(x)$ non interseca l'asse delle ordinate poiché esiste per x >2.

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \log_{1/2}\dfrac{x-2}{x^2+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \log_{1/2}\dfrac{x-2}{x^2+1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2+1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2-x^2-1}{x^2+1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{-x^2+x-3}{x^2+1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^2-x+3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} \qquad \Delta < 0 \qquad \emptyset$$

$f(x)$ non interseca l'asse delle ascisse.

## Segno

Poniamo $f(x) > 0$:

$$\log_{1/2}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) > 0$$

$$\frac{x-2}{x^2+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \qquad \frac{x-2}{x^2+1} - 1 < 0 \qquad \frac{x-2-x^2-1}{x^2+1} < 0$$

$$\frac{-x^2+x-3}{x^2+1} < 0 \qquad \begin{cases} N > 0 \\ D > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2+x-3 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \emptyset \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in D$$

## Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 2^+} \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = +\infty \qquad \to x = 2 \textit{ è un asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_{1/2}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = +\infty$$

## Derivata prima

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x-2}\log_{1/2} e\left(\frac{x^2+1-(x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}\right) = ln\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right)\left(\frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= \log_{1/2} e\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right)\left(\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\right)$$

Poniamo

$f'(x) \geq 0$

$$\frac{(-x^2+4x+1)}{(x-2)(x^2+1)} \cdot \log_{1/2} e \geq 0$$

$$\begin{cases} -x^2+4x+1 \geq 0 \\ x-2>0 \\ x^2+1>0 \\ \quad \log_{1/2} e > 0 \end{cases}$$

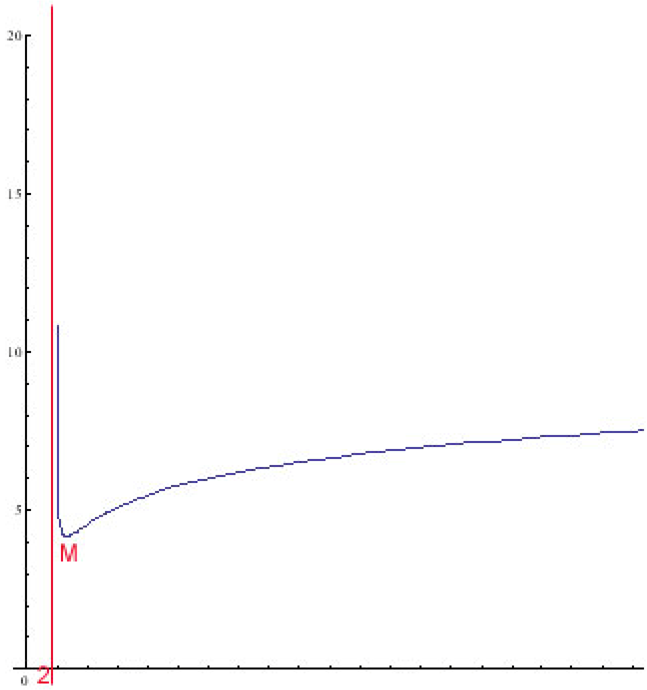
Le radici della prima sono.
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$

Pertanto :

$$\begin{cases} 2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5} \\ x > 2 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \quad \emptyset \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette minimo in $x = 2+\sqrt{5}$

Calcoliamo$f(2+\sqrt{5}) = \log_{1/2}\left(\frac{\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right)$ quindi $\min(2+\sqrt{5};\ \log_{1/2}\left(\frac{\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right))$


20
15
10
5
0
2
M

2. Studiare la funzione:

$$y = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

## Dominio

$\frac{x-1}{x+1} > 0 \qquad \left[\begin{array}{l} x-1>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x>-1 \end{array}\right.$

$$D: (-\infty;\ -1)\ \cup\ (1;\ +\infty)$$

## Intersezione con gli assi cartesiani.

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$\begin{cases} y=0 \\ y=\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x-1}{x+1}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x-1}{x+1}-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x-1-x-1}{x+1}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ \frac{-2}{x+1}=0 \end{cases} \qquad \emptyset$

Non ci sono soluzioni, pertanto $f(x)$ non interseca l'asse delle ascisse.

$f(x)$ non interseca l'asse delle ordinate poiché non esiste tra -1 e 1.

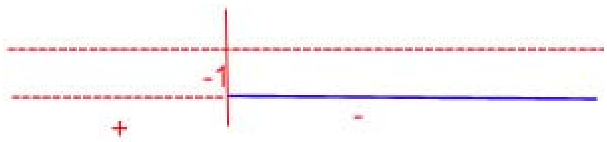
## Segno della funzione

Poniamo $f(x) > 0$

$\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$

$\frac{x-1}{x+1} > 1 \qquad \frac{x-1-x-1}{x+1} > 0 \qquad \frac{-2}{x+1} > 0$

$$\left[\begin{array}{l} -2>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ x>-1 \end{array}\right.$$




$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ (-\infty;\ -1)$

$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ (1;\ +\infty)$

## Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to} -f(x) = \log\left(\frac{-2}{0}\right) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} +f(x) = \log(0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

## Derivata prima: max e min

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$f'(x) \geq 0$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \qquad \begin{cases} 2 \geq 0 & \forall\, x \in R \\ x \leq -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(grafico)

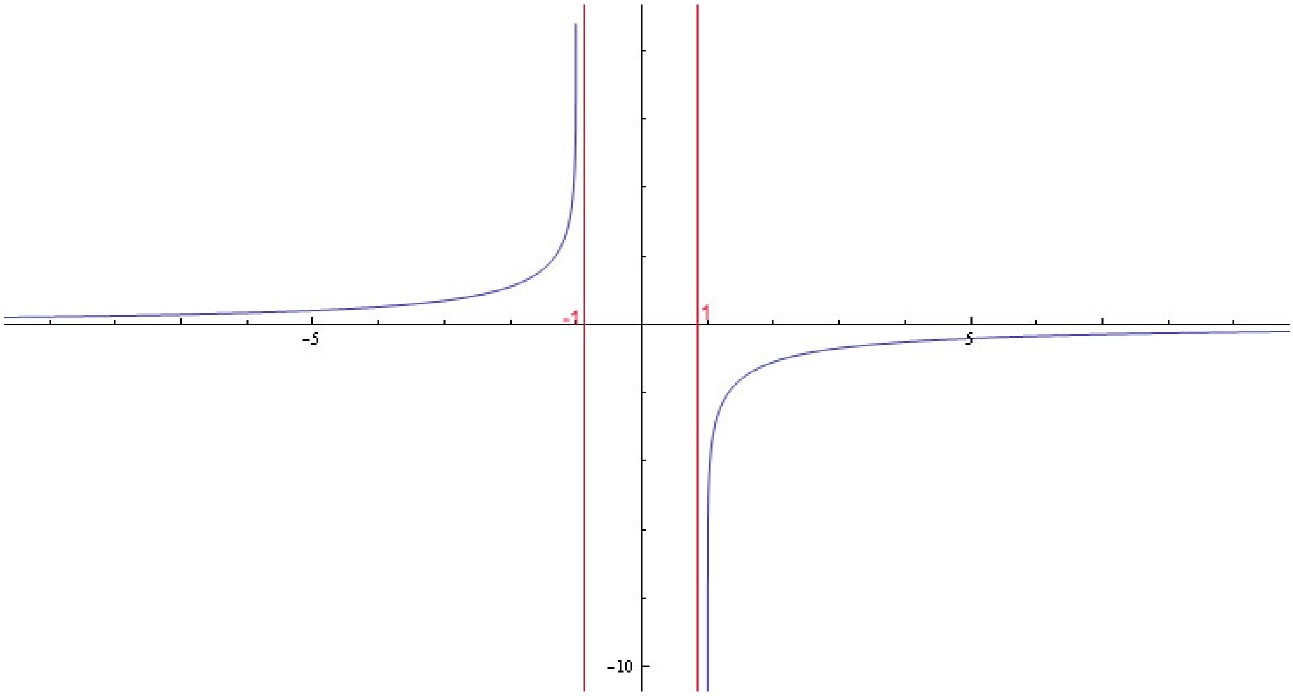
$f(x)$ è crescente $\forall\, x \in R\ \ (-\infty;\ -1)\ \cup\ (1;\ +\infty)$

## Flessi

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \qquad f''(x) = 2 - \left(\frac{1}{(x^2 - 1)^2}\right) \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \geq 0 \quad \begin{cases} -4x \geq 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ \forall\, x \in R \end{cases}$$

La funzione volge la concavità verso il basso per x<0, verso l’alto per x>0.



3. Studiare la funzione:

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$D: \mathbb{R}$

### Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad O = (0; 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ e^x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ e^x = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

### Segno della funzione

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \quad \begin{bmatrix} e^x - 1 > 0 \\ e^x + 1 > 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e^x > 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x > 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

(grafico)

$f(x) > 0 \quad \forall\, x > 0$

$f(x) < 0 \quad \forall\, x < 0$

Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{-1}{+1} = -1 \quad \to \quad y = -1 \; a.o.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 \quad \to \quad y = 1 \; a.o.$$

### Derivata prima

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$f'(x) \geq 0 \qquad \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ è sempre crescente.

## Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2[e^x(e^x + 1)^2 - 2e^x(e^x + 1)e^x]}{(e^x + 1)^4} \rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x + 1)(1 - e^x)}{(e^x + 1)^4} \geq 0$$

$1 - e^x \geq 0 \qquad e^x \leq 1$

$x \leq 0$

$F(0; 0) \equiv$