Serie numeriche

Data una successione numerica $\{a_n\}_{n\in N}$, si dice **serie** la somma dei termini di tale successione e la indicheremo con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Consideriamo la successione delle **somme parziali** $\{s_n\}_{n\in N}$, ovvero la successione costituita da:

$s_1=a_1$

$s_2= a_1+ a_2$

$s_3= a_1+ a_2 +a_3$

………………………

…………………………

$s_n= a_1+ a_2+a_3+\dots\dots+a_n$

…………………………………………

- ✓ Se la successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n\in N}$ è regolare allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è regolare.
- ✓ Se la successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n\in N}$ non è regolare allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non è regolare.

Il limite $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ si dice **somma della serie** $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

La differenza $R_n = S\text{-}s_n= a_{n+1}+ a_{n+2} +a_{n+3}+\dots\dots\dots+\dots$ si dice **resto n-simo** ed il $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

Diamo alcuni esempi di serie convergenti e divergenti in base alla definizione di serie.

Esempio 1

Provare in base

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\cdots$$

Consideriamo la

$$s_n=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$s_n=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right)$$

$$s_n=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}$$

Semplificando:

$$s_n=2-\frac{1}{n}$$

Passando al limite:

$$\lim_{n\to\infty}2-\frac{1}{n}=2$$

La serie data converge e la somma è 2.

Esempio 2

Proviamo che la serie

$$\sum_1^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

è divergente.

La serie si può scrivere

$$\log 2 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \dots\dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) + \dots.$$

calcoliamo $s_n = \log 2 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \dots\dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

che si può scrivere:

$s_n = \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 3 - \log 3 + \log 5 - \log 4 + \dots\dots + \log(n+1) - \log n$

Semplificando si ha:

$$s_n = \log(n+1)$$

Passando al limite:

$$\lim_{n\to\infty} = \log(n+1) = +\infty$$

Si osservi che il termine generale

$$a_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ha come limite

$\lim_{n\to\infty} = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

E ciò mostra che la condizione $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ non è una condizione sufficiente per stabilire la convergenza di una serie numerica.

Esempio 3

Mostrare che la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente in base alla definizione.

Poniamo:

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Da cui:

$$\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+1}{n(n+1)}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi; si ha:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

sicchè:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Pertanto la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots - \frac{1}{n} + \ldots$$

Calcoliamo s_{n}:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

e passiamo al limite:

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

Quindi la serie converge e ha per somma 1.

Esempio 4

Mostrare che la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ è convergente in base alla definizione di serie numerica.

Poniamo:

$$\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Da cui:

$$\frac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+C(n+1)n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A(n^2+3n+2)+B(n^2+2n)+C(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)}=$$

Applicando il principio di identità dei polinomi; si ha:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

sicchè:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(n+2)}$$

Pertanto la serie

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{4}+......+\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(n+2)}...$$

Calcoliamo la s_n:

$$s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{4}+......+\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(n+2)}$$

$$s_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{4}\right)+......+\left(\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(n+1)}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(n+2)}\right)$$

Ovvero:

$$s_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Quindi la serie è convergente con somma

$$S = \frac{1}{4}$$