Derivata delle funzioni reali ad una sola variabile.

Definizione. Sia *f(x)* una funzione reale definita in un intervallo *(a, b)*, sia x_0 un punto dell'Intervallo *(a, b)* la differenza $f(x)-f(x_0)$ è detto **incremento della funzione *f(x)*** dovuto al passaggio del punto x_0 al punto *x*.

La differenza $(x- x_0)$ è detta **incremento della variabile** , il rapporto:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

è detto **rapporto incrementale**.

Ebbene, se esiste ed è finito il limite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

tale limite è detto derivata **della funzione *f(x)* nel punto x_0.**

Simbolicamente la derivata la si indicherà con *D(f(x)),* $f'(x)$ o con $y' = f'(x)$

Egualmente, posto:

$\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

si può anche scrivere che la derivata è:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Spesso, per comodità, viene usata anche la seguente scrittura per dare la definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

dove $h = x_0 - x$

Diremo quindi che **una funzione *f(x)* è derivabile nel punto x_0** se esiste ed è finito il limite suddetto.

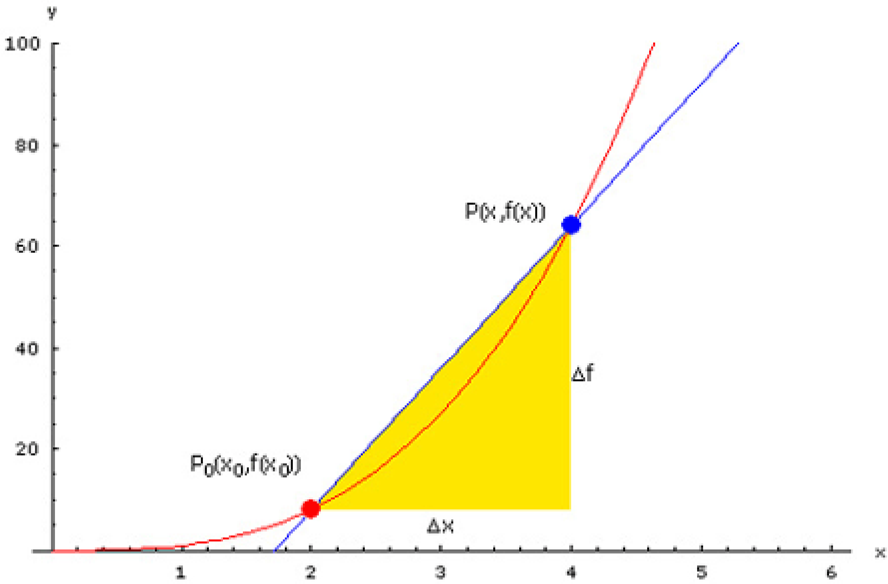
Parleremo di **derivata destra** (sinistra) se esiste ed è finito il limite destro (sinistro) del rapporto incrementale.

Una funzione è derivabile in un punto x_0 se la derivata destra coincide con la derivata sinistra.

Significato geometrico della derivata

Supponiamo che la funzione *f(x)* ha l'andamento come nella figura seguente e consideriamo il punto $P\ (x, f(x))$ ed il punto $P_0(x_0\ ,f(x_0))$

.

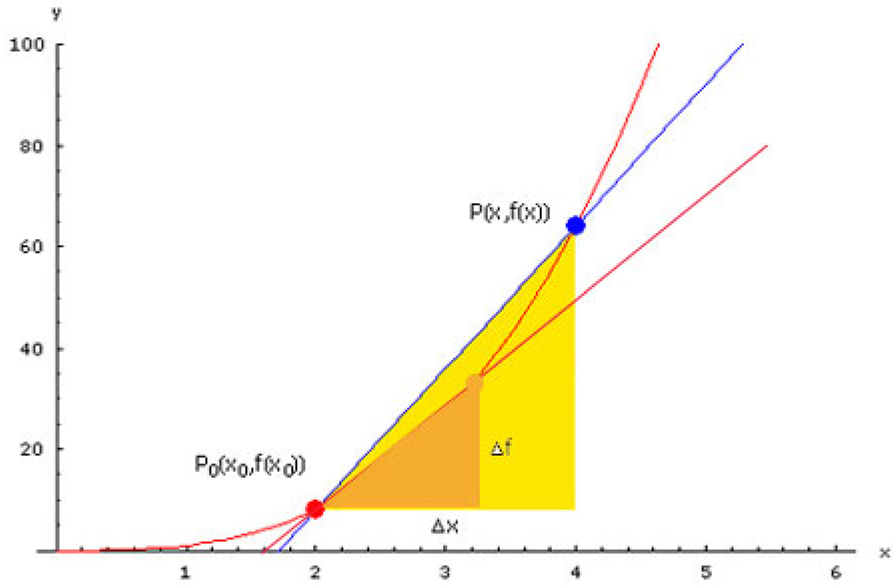


Il rapporto

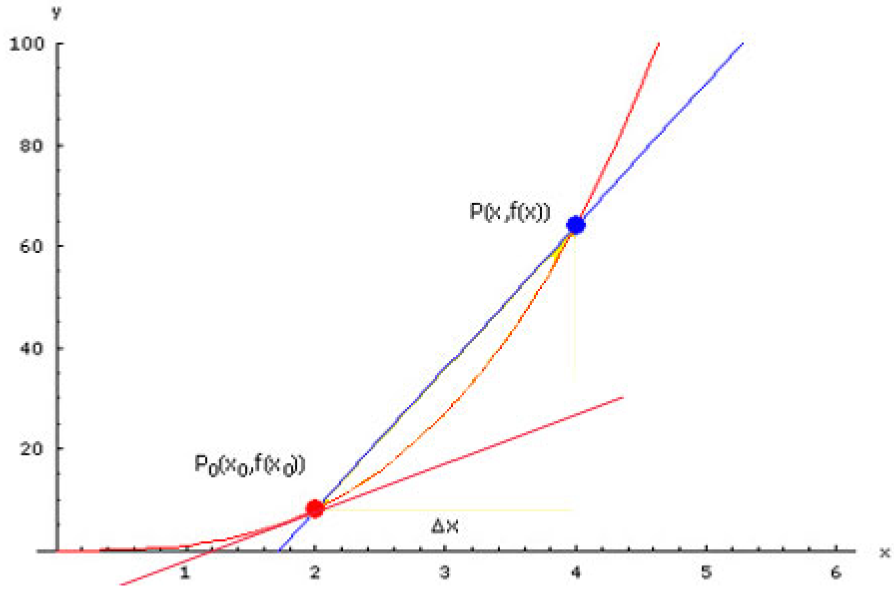
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

non rappresenta altro che il coefficiente angolare della retta PP_0 quindi l'angolo che la retta PP_0 forma con il semiasse positivo delle x.

Facendo avvicinare x ad x_0 la retta secante PP_0 cambia inclinazione



Facendo avvicinare sempre più *x* ad x_0, ovvero passando al limite, per x che tende a x_0, cioè avvicinando il punto *P* al punto P_0 , la retta PP_0, che dapprima era secante la curva, diventa tangente alla curva nel punto x_0 .



La *f'(x)* rappresenta coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto x_0.