Esercizi svolti sulle derivate – advanced

1. Calcoliamo $D(x^x)$

La funzione data può essere scritta:

$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

Pertanto:

$$D(e^{x\ln x}) = e^{x\ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$$

2. Calcoliamo $D(x^{senx})$

La funzione data può essere scritta:

$$x^{senx} = e^{\ln x^{senx}} = e^{senx \ln x}$$

Pertanto:

$$D(e^{senx\ln x}) = e^{senx\ln x} \cdot (\cos x \cdot \ln x + senx \cdot \frac{1}{x}) = x^{senx}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{senx}{x}\right)$$

3. Calcoliamo $D(\sqrt{x}^{\sqrt{x}})$

La funzione data può essere scritta:

$$\sqrt{x}^{\sqrt{x}} = e^{\ln \sqrt{x}^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$$

Pertanto:

$$D(e^{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}} \cdot (\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln\sqrt{x} + 1\right)\right)$$

4. Calcoliamo

$$D\left(arcsen\,\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

Bisogna fare la derivata di una funzione composta da $arcsenf(x)$ e da una fratta,

Ricordiamo:

$$D(arcsenx)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad e \qquad D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'g-f\,g'}{g^2}$$

Per cui nel nostro caso:

$$D\left(arcsen\,f(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x)$$

$$*=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2x(x^2)-(x^2-1)(2x)}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4\sqrt{\frac{x^4-x^4+2x^2-1}{x^4}}}=$$

$$=\frac{2x}{\frac{x^4\sqrt{2x^2-1}}{x^2}}=\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$$

$$D\left(arcsen\,\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$$

5. Calcoliamo

$$D\left(\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{cosx}{sen^2x}\right)=\frac{1}{2}D\left(\ln tg\frac{x}{2}-\frac{cosx}{sen^2x}\right)$$

La funzione data è differente tra una funzione composta e un rapporto;

portiamo $\frac{1}{2}$ fuori dal segno di derivazione:

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(-sex)\,sen^2x-(cosx)\,2senx\cdot cosx}{sen^4x}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}-\frac{(-sen^3x-2senx\,cos^2x)}{sen^4x}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2sen\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}}+\frac{senx(sen^2x+2cos^2x)}{sen^4x}\right|=$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{senx} + \frac{1+cos^2x}{sen^3x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{sen^2x+1+cos^2x}{sen^3x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{sen^3x}\right) = \frac{1}{sen^3x}$$

<u>NOTA:</u>

$\mathbf{2senx\,cosx = sen2x}$

6. Calcoliamo

$$D(arcsenx^2 + arcosx^2)$$

La funzione da derivare è somma di due funzioni composte; ricordiamo che:

$$D\big(arcos\,f(x)\big) = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x\right) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$$

7. Calcoliamo

$$D\left(\frac{1}{2}(arcsenx)^2 arcosx\right) = *$$

La funzione da derivare è data da un prodotto di funzioni, pertanto terremo conto delle formula di derivazione di un prodotto: $f'g + f\,g'$

La costante $\frac{1}{2}$ fuori dalla derivazione e…. che $arcsenx$ è al quadrato pertanto ricordiamo che $D\big(f^\alpha(x)\big) = \alpha\, f^{\alpha-1}(x)$

$$* = \frac{1}{2}\left[2arcsenx \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot arcosx + (arcsenx)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\right] =$$

Mettiamo in evidenza $\frac{arcsenx}{\sqrt{1-x}}$

$$= \frac{1}{2}\frac{arcsenx}{\sqrt{1-x}}[2arcosx - arcsenx]$$

8. Calcoliamo

$$D\left(e^x(sen3x - 3\,cos3x)\right)$$

Derivata di un prodotto:

$$= e^x\left((sen3x) - 3cos3x\right) + e^x\left(cos3x \cdot 3 - 3(-sen3x)\right)$$

Mettiamo in evidenza e^x e svolgiamo i prodotti

$$= e^x[sen3x - 3cos3x + 3cos3x + 9sen3x]$$

Sommando i termini simili si ha:

$$= e^x(10sen3x) = 10e^x sen3x$$