Teorema sulla derivabilità e continuità

Se f è una funzione reale, $\Rightarrow$ (f è continua derivabile)

Osserviamo che **non è vero il viceversa,** ad esempio consideriamo la funzione :

$$f : x \in R \rightarrow |x| \in R$$

Essa è definita in tutto R , a sinistra dello 0 la funzione è f(x) = - x e a destra f(x) = x.

Vediamo se la funzione è continua in 0, valutiamo a tal proposito il limite destro ed il limite sinistro della funzione:

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = 0 ; \quad \lim_{x\to 0^+} |x| = 0$$

Poiché i due limiti coincidono, la f è continua in 0.

Vediamo ora se la funzione è derivabile in zero, dobbiamo vedere se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale o più precisamente se la derivata destra coincide con la derivata sinistra.

Calcoliamo quindi la derivata sinistra:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 ;$$

calcoliamo la derivata destra:

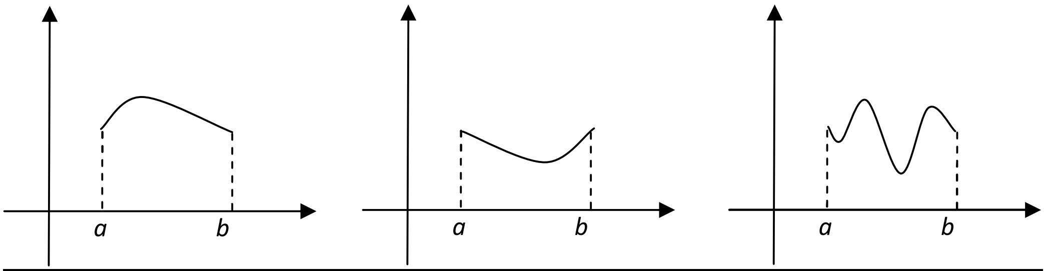
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 .$$

La derivata destra della funzione non coincide con quella sinistra pertanto la funzione non è derivabile in 0.

Teorema di Rolle

Sia f una funzione definita e continua in un intervallo [a,b] chiuso e limitato, e derivabile in]a,b[, se *f(a)=f(b)*, allora esiste almeno un punto c di]a,b[tale che:

$$f\,'(c) = 0$$



Teorema di Lagrange (o del valor medio).

Sia f una funzione definita e continua in un intervallo [a,b] chiuso e limitato, e derivabile in]a,b[, allora esiste almeno un punto c di]a,b[tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f\,'(c)$$

Osservazione 1: Tale teorema discende dal precedente teorema di Cauchy, basta prendere come funzione $y = g(x)$ la funzione $y = x$, infatti è $g(b) - g(a) = b - a$ e $g'(x)$=1.

Osservazione 2: Il teorema di Lagrange porta a definire il **valor medio** della funzione f (soddisfacente alle ipotesi del teorema di Lagrange) nell'intervallo $[a, b]$, ossia esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f\,'(x_0)$

Teorema di Cauchy.

Siano f e g due funzioni continue in un intervallo [a,b] e derivabili almeno in]a,b[. Sia inoltre $g'(x) \neq 0$. Allora esiste almeno un punto c di]a,b[tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f\,'(c)}{g\,'(x)}$$