Esercizi svolti: campi di definizione di funzioni reali

Esercizio 1

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - 1}$$

Il denominatore deve essere diverso da zero affinché la funzione abbia senso:

$$x^3 - 1 \neq 0 \qquad x \neq 1$$

D: $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$

Esercizio 2

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log(\mathrm{x} - 3) + \log(2\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^2)$$

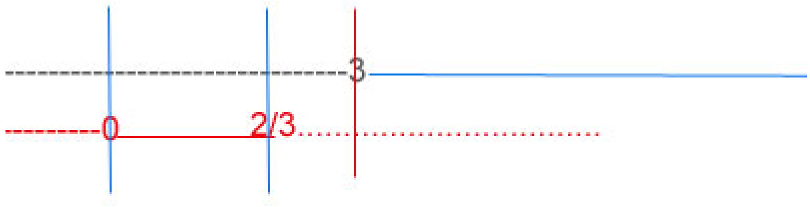
Abbiamo due logaritmi, affinché la funzione esista devono esistere contemporaneamente entrambe e quindi deve essere verificato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ 2x - 3x^2 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ 0 < x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$2x - 3x^2 = 0$

$x(2-3x)=0 \ \rightarrow x=0; x=\frac{2}{3}$



Pertanto il dominio della funzione è:

$$\boldsymbol{D}: \emptyset \ f(x) = \text{arcsen} \log x$$

Esercizio 3

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\ (2 \cdot 3^x - 5)$$

La funzione logaritmica ha senso solo se il suo argomento è positivo, pertanto:

$$2 \cdot 3^x - 5 > 0;$$

$2 \cdot 3^x > 5; \quad 3^x > \frac{5}{2};$

$$x > \ log_3 \frac{5}{2}$$

Pertanto il dominio della funzione data è:

$$D: \left(log_3 \frac{5}{2}; \ +\infty \right)$$

Esercizio 4

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\left(3 \cdot 2^x - 5 \cdot 7^x\right)$$

La funzione logaritmica ha senso solo se il suo argomento è positivo, pertanto:

$$3 \cdot 2^x - 5 \cdot 7^x > 0$$

$3 \cdot 2^x > 5 \cdot 7^x$

Dividendo primo e secondo membro per $3 \cdot 7^x$ si ha:

$$\frac{2^x}{7^x} > \frac{5}{3} \quad \rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x > \frac{5}{3}$$

$$x < log_{\frac{2}{7}} \frac{5}{3}$$

N.B. la disequazione cambia segno perché la base dell'esponente esponenziale
è minore di 1. Pertanto il dominio è:

$$D: \left(-\infty;\ log_{\frac{2}{7}} \frac{5}{3}\right)$$

Osserva: per poter calcolare il valore approssimato di $log_{\frac{2}{7}} \frac{5}{3}$ basterà effettuare il cambiamento di base:

$$log_{\frac{2}{7}} \frac{5}{3} = \frac{log_{10} \frac{5}{3}}{log_{10} \frac{2}{7}} = \frac{log5 - log3}{log2 - log7}$$

Esercizio 5

Determinare il dominio della funzione

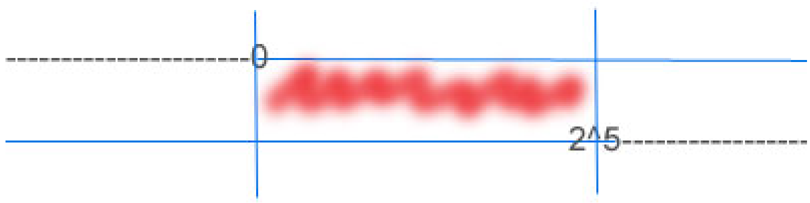
$$f(x) = \sqrt[4]{5 - log_2 x}$$

La funzione data, essendo una radice ad indice pari esiste se il radicando è maggiore o uguale a zero e contemporaneamente l'argomento del logaritmo deve essere positivo, pertanto poniamo:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 5 - log_2 x \geq 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -log_2 x \geq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ log_2 x \leq 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \leq 2^5 \\ x > 0 \end{cases}$$



Il dominio della funzione è:

$$D: (-\infty; 0) \ \cup (1/2\, ; 1] \cup [2; \ +\infty)$$

Esercizio 6

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\left(log^2x - 7logx + 12\right)$$

La funzione logaritmica ha senso solo se il suo argomento è positivo, pertanto:

$$\begin{cases} log^2x - 7logx + 12 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima:

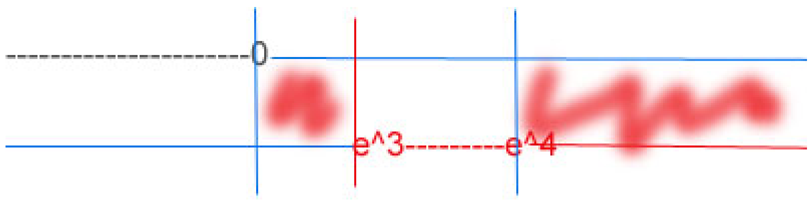
$$log^2x - 7logx + 12 = 0$$

$$logx = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow (4;\ 3)$$

e quindi la disequazione è verificata per valori esterni: $logx < 3\ \cup\ logx > 4$

Pertanto il sistema diventa:

$$\begin{cases} logx < 3\ \cup\ logx > 4 \\ x > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x < e^3\ \cup\ x > e^4 \\ x > 0 \end{cases}$$



Pertanto il dominio della funzione è:

$$D: (0;\ e^3) \cup (e^4;\ +\infty)$$

Esercizio 7

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = (x^2 + 5x + 6)^{-\frac{1}{3}}$$

La funzione potenza ad esponente razionale negativo esiste se la base è positiva:

$$x^2 + 5x + 6 > 0$$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \rightarrow (\mathrm{x}_1 = -3;\ \ \mathrm{x}_2 = -2)$$

La disequazione è verificata per valori esterni alle radici, per cui il dominio della funzione data è:

$$D: (-\infty;\ -3) \cup (-2;\ +\infty)$$

Esercizio 8

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = (2\,arcosenx + \pi)^{\frac{1}{3}}$$

La funzione potenza ad esponente razionale positivo esiste se la base è positiva o uguale a 0:

$$\begin{cases} 2\,arcosenx + \pi \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} arcosenx \geq -\dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \times \in [-1; 1] \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Il dominio è: D: $[-1; 1]$

Esercizio 9

Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{\pi}$$

La funzione potenza ad esponente reale positivo esiste se la base è positiva o uguale a 0:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

troviamo gli zeri del polinomio:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \rightarrow (\mathrm{x}_1 = 1;\ \ \mathrm{x}_2 = 2)$

La disequazione è verificata per valori esterni alle radici

$$x \leq 1;\ \ x \geq 2$$

Pertanto il dominio della funzione:

$$D: (-\infty\ 1]\ \cup [2;\ +\infty)$$

Esercizio 10

Determinare il dominio della funzione

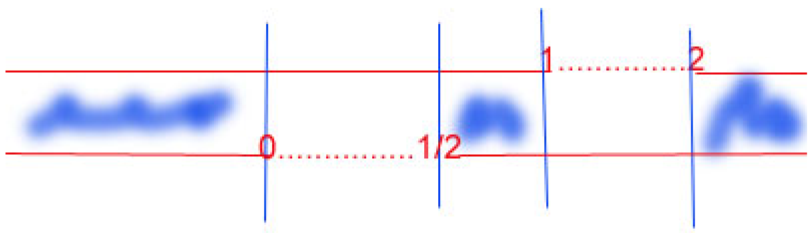
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x}}$$

La funzione data, essendo una radice ad indice pari esiste se il radicando è maggiore o uguale a zero, pertanto poniamo:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x} \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 - x > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 1 \quad e \quad x \geq 2 \\ x < 0 \quad e \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow (2;\ 1)$$



Pertanto il dominio della funzione è:

$$D: (-\infty; 0)\ \cup (1/2\,; 1] \cup [2;\ +\infty)$$