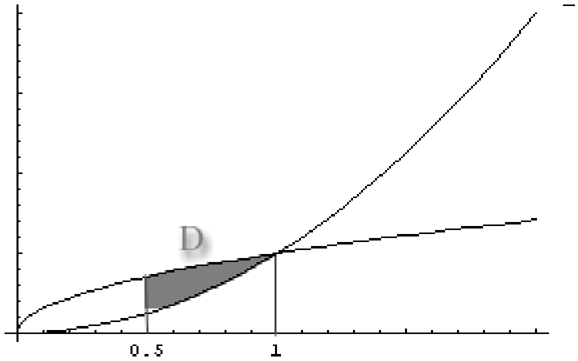
Esercizio 1

Calcare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\,dxdy \,,$$

dove D ={(x,y) / 1/2 ≤ x ≤ 1 e $x^2 \le y \le x^{1/2}$}



Il dominio D è normale rispetto all'asse delle x, pertanto:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} =$$

Calcoliamo quindi prima l'integrale relativo alla y, che è un semplice integrale (una potenza):

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y)^{\frac{-1}{3}}\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x})dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

mettendo in evidenza la radice cubica di x ha:

$$\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[3]{x}\,\frac{(1-x)dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)dx =$$

da cui facilmente si ottiene l'integrale cercato:

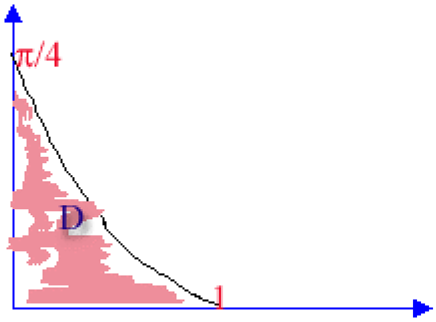
$$\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)dx = \frac{3}{2}\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale $\iint_D \frac{x}{(x^2+1)^2}dxdy$,

dove D è la parte di piano delimitata dai semi assi positivi del piano Cartesiano e la curva

Ω: *x*^{2}*+seny-cosy=0*



Il dominio è normale sia rispetto ad *x* che a *y*, ma data la complessità della equazione della curva , conviene considerare il dominio normale rispetto all'asse delle *y*.

(Dall'equazione di Ω possiamo ricavarci $x = \pm\sqrt{\text{cosy - seny} = 0}$, sarebbe più complicato ricavare y in funzione di x)

Dunque:

$$\iint_D \frac{x}{(x^2+1)^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sqrt{\cos y - seny}} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\frac{1}{2}$ in modo da avere la derivata della funzione x^2+1, quindi il secondo integrale è immediato (potenza):

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sqrt{\cos y - seny}} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sqrt{\cos y - seny}} \frac{1}{2}2x(x^2+1)^{-2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\left(x^2+1\right)^{-1}\right]_0^{\sqrt{\cos y - seny}} dy$$

sostituiamo gli estremi dell'intervallo di integrazione, si ottiene l'integrale in y:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\left(x^2+1\right)^{-1}\right]_0^{\sqrt{\cos y - seny}} dy = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\cos y - seny+1)^{-1} - 1)dy = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\left(\cos y - seny+1\right)} - 1\right]dy =$$

Calcoliamo a parte l'integrale:

$$\int \frac{1}{(\cos y - seny + 1)} dy$$

Posto *tgy/2=**t***
*y/2= arctag**t***
*y=2arctg**t***
*dy=2/1+**t**^{2}dt*
seny= 2t/1+t^2
cosy=1-t^2/1+t^2

$$\int \frac{1}{(\cos y - seny + 1)} dy = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1+t}} dt =$$

Semplificando e facendo il minimo comune multiplo si ha:

$$\int \frac{2}{2(1-t)} dt = -\log(1-t) \; .$$

Ritorniamo alla variabile y

$$\int \frac{1}{(\cos y - seny + 1)} dy = -\log(1 - tg\frac{y}{2})$$

Pertanto l'integrale:

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{(\cos y - seny + 1)} - 1 \right] dy = -\frac{1}{2}\left[-\log(1 - tg\frac{y}{2}) + y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log(1 - tg\frac{\pi}{8}) + \frac{\pi}{8}$$