Continuità funzioni a 2 variabili- esercizi svolti

1. Dimostrare che la funzione è discontinua nell'origine:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & per \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

Trasformiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho cos\vartheta \\ y = \rho sen\vartheta \end{cases}$$

$$F(\rho,\vartheta) = \frac{\rho^4 cos\vartheta sen\vartheta}{\rho^4(cos^4\vartheta + sen^4\vartheta)}$$

E passiamo al limite:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{cos\vartheta sen\vartheta}{(cos^4\vartheta + sen^4\vartheta)} = ?$$

Non esiste perché assume valori diversi al variare di ϑ, quindi la funzione non è continua.

2. Dimostrare che la funzione $f(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}$ è continua nell'origine.

La funzione è definita in $\mathbb{R}^2 - \{x \neq 0 \quad y \neq 0\}$; valutiamo

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2y^2} \qquad con \quad x^2y^2 \neq 0; \;\; x \neq 0; \;\; y \neq 0$$

Trasformiamo in coordinate polari la funzione:

$$\begin{cases} x = \rho cos\vartheta \\ y = \rho sen\vartheta \end{cases}$$

$$F(\rho; \vartheta) = \frac{1}{\rho^4(sen^2\vartheta cos^2\vartheta)}$$

E quindi

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^4 cos^2\vartheta sen^2\vartheta} = +\infty$$

Dunque la funzione non è continua in O(0,0).

3. Calcolare:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

Determiniamo il dominio della funzione data:

$$x^2+y^2 \neq 0 \qquad f(x) \text{ è } definita\ in\ \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Ricordiamo le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho cos\vartheta \\ y = \rho sen\vartheta \end{cases}$$

Sostituiamo in $f(x)$ per ottenere la funzione $F\ (\rho, \vartheta)$

$$F\ (\rho, \vartheta) = \frac{\rho^2 sen\vartheta cos\vartheta(\rho^2 cos^2\vartheta - \rho^2 sen^2\vartheta)}{\rho^2(sen^2\vartheta + cos^2\vartheta)} =$$

$$= \frac{\rho^4 sen\vartheta cos\vartheta(\rho^2 cos^2\vartheta - \rho^2 sen^2\vartheta)}{\rho^2} =$$

Passiamo al limite

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^2 sen\vartheta cos\vartheta(\rho^2 cos^2\vartheta - \rho^2 sen^2\vartheta) = 0 \qquad \square\vartheta$$

4. Dimostrare che la funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ è continua nell'origine.

Trasformiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho cos\vartheta \\ y = \rho sen\vartheta \end{cases}$$

la nostra funzione diventa:

$$F(\rho,\vartheta)=\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2 sen^2\vartheta}=\rho$$

per cui

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\vartheta)=\lim_{\rho\to 0}\rho=0 \quad \underline{\forall\vartheta}.$$

La nostra funzione è continua in (0,0) ed in ogni punto del suo dominio.