Limite di una funzione reale.

Definizione

Sia *f(x)* una funzione definita in un intervallo [a,b] e sia x_0 un punto dell'intervallo.

Diremo che la funzione *f(x)* , per *x* che tende a x_0 , ha come limite l e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

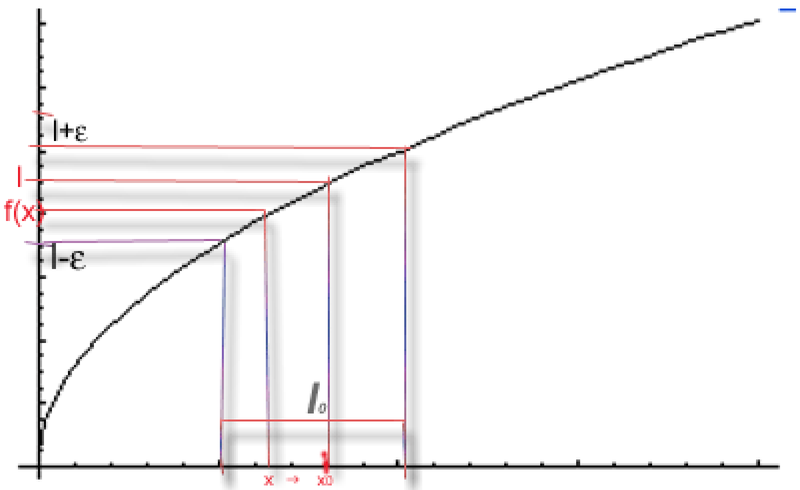
quando $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno I_0 del punto x_0 tale che $\forall x \in I_0 - x_0$ risulta che:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

ovvero:

$$l - \varepsilon < |f(x)| < l + \varepsilon$$

Detto in parole semplici, quando più la *x* si avvicina ad x_0 tanto più la *f(x)* si avvicina al valore *l* e sarà compresa tra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$:



Quindi per verificare se un valore l è limite oppure no di una funzione, per x che tende ad x_0, bisognerà valutare se assegnato un valore □, positivo, esiste un intorno I_0 in modo tale che la f(x) sia compresa tra $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$.

Esempio

Verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 2} x+5=7$$

Per provare ciò dobbiamo far vedere che assegnato un □>0 , arbitrario e piccolo, esiste un intorno di 2 in modo tale che $7-\varepsilon<|x+5|<7+\varepsilon$.

Quindi preso $\varepsilon>0$ si ha:

$$7-\varepsilon<|x+5|<7+\varepsilon$$

e risolvendo le due banali disequazioni,

- $7-\varepsilon<|x+5|\Rightarrow 7-\varepsilon-5<x\Rightarrow 2-\varepsilon<x$
- $|x+5|<7+\varepsilon\Rightarrow x<-5+7+\varepsilon\Rightarrow x<2+\varepsilon$

si ha:

$$2-\varepsilon<x<2+\varepsilon$$

ovvero esiste un intorno del punto 2.

Definizione di limite destro

Si definisce limite destro

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

se, per ogni intorno I_l di l, è possibile trovare un intorno destro I_c di c, tale che per ogni $x \in I_c \subseteq X$, sia ha che :

$$f(x) \in I_l$$

Definizione di limite sinistro

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l$$

se, per ogni intorno I_l di l, è possibile trovare un intorno sinistro I_c di c, tale che per ogni $x \in I_c \subseteq X$, accade che:

$$f(x) \in I_l$$

"Aritmetica" dei limiti

Consideriamo $\lim_{x \to c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to c} g(x) = l_2$ dove c è numero reale, allora valgono le seguenti regole:

- $\lim_{x \to c} Kf(x) = Kl_1$
- $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \to c} f(x) * g(x) = l_1 * l_2$
- $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}$ (Con l_1 diverso da zero)
- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ (Con l_2 diverso da zero)