Limiti- esercizi svolti

1.Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$$

Sostituendo 1 al posto della x sia al numeratore che al denominatore si ottiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}=\frac{0}{0}\quad\rightarrow\quad forma\ indeterminata$$

Essendo 1 una radice di entrambe i polinomi scomponiamo i due polinomi con Ruffini:

	1	0	-3	+2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Pertanto la scomposizione del numeratore è:

$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

$x^2+x-2=0$

$$x=-\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=-\frac{1\pm 3}{2}=\begin{array}{l}\nearrow\ -\frac{1\pm 3}{2}=1\\ \searrow\ -\frac{1-3}{2}=-2\end{array}$$

$(x^3-3x+2)=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$

la scomposizione del denominatore è:

$x^2-6x+5=(x-5)(x+1)$

Il nostro limite diventa:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x-5)}$$

Semplifichiamo e sostituiamo 1 al posto di x:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-5}=\frac{0}{4}=0$$

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$$

Sostituendo 3 alla x sia al numeratore che al denominatore si ha:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}=\frac{0}{0}$$

Dunque 3 è radice di due polinomi, pertanto passiamo alla loro scomposizione:

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)\quad (scomponiamo-\ trinomio\ particolare-somma\ e\ prodotto)$$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2\quad (quadrato\ di\ un\ binomio)$$

Pertanto il limite di partenza può essere scritto:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2}$$

Semplificando e sostituendo 3 al posto di x si ha:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}=\frac{4}{0}=\infty$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

Sostituendo 1 al posto di x si ha la forma indeterminata: $\infty-\infty$

Scomponiamo i denominatori, facciamo il minimo comune multiplo e quindi i calcoli:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)$$

E sostituendo 1 al posto della x si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{0}{0}$$

Scomponiamo x^2+x-2 con somma e prodotto:

$$(x^2+x-2)=(x+2)(x-1)$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\frac{3}{3}=-1$$

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{senx-cosx}$$

Sostituendo $\frac{\pi}{4}$ al posto di x si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{senx-cosx}=\frac{0}{0}$$

Basterà scomporre il numeratore:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos^2 2x-sen^2 x}{senx-cosx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(cosx-senx)(cosx+senx)}{(senx-cosx)}=-1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$$

4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-tgx}{1-cotgx}$$

Sostituendo $\frac{\pi}{4}$ al posto di x si ha la forma $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-tgx}{1-cotgx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{senx}{cosx}}{1-\frac{cosx}{senx}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(cosx-senx)}{cosx} \cdot \frac{senx}{(senx-cosx)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -tgx = -1$$

5.Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Basterà scomporre il denominatore:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$