Integrali indefiniti -Esercizi svolti- AD

Esercizio 1

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int ar\cos x dx$$

$$\int ar\cos x dx = ar\cos x \cdot x - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ar\cos x \cdot x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ar\cos x \cdot x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2)x dx =$$

$$= xar\cos x - \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = xar\cos x - \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = xar\cos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

Esercizio 2

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int xtg^2 x dx$$

Ricordiamo che:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\int xtg^2 x dx = \int x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int x\frac{1}{\cos^2 x} dx - \int x dx$$

Calcoliamo procedendo per parti l'integrale

$$\int x\frac{1}{\cos^2 x} dx = xtgx - \int tgx \cdot 1 dx = xtgx - \int \frac{senx}{\cos x} dx = xtgx + \log|\cos x| + c$$

Pertanto l'integrale di partenza è:

$$\int xtg^2 x dx = xtgx + \log|\cos x| - \frac{x^2}{2} c$$

Esercizio 3

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

L'integrale dato si può scrivere:

$$\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int arctgx \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Procediamo per parti, ma prima osserviamo che $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ è un integrale immediato:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int x(1+x^2)^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-1/2}2xdx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2} + c = (1+x^2)^{1/2} + c$$

Pertanto:

$$\int arctgx \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = arctgx\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

Calcoliamo $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$:

Poniamo:

$$\sqrt{1+x^2} = t - x \rightarrow 1+x^2 = t^2 - 2tx + x^2 \rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} \rightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2}$$

Sostituendo si ha:

$$\int \frac{1}{t-\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int \frac{1}{\frac{2t^2-t^2+1}{2t}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c$$

Pertanto l'integrale dato:

$$\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx = arctgx\sqrt{1+x^2} - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c$$

Esercizio 4

Si calcoli il seguente integrale:

$$\int \ln(1-x)dx$$

Scegliamo come fattore finito *1* e come fattore differenziabile *ln (1-x)* si ha :

$$\int \ln(1-x)dx = x\ln(1-x) - \int x \cdot \frac{1}{1-x}(-1)dx = x\ln(1-x) + \int \frac{-x}{1-x}dx =$$

Aggiungendo e sottraendo 1 si ha:

$$= x\ln(1-x) + \int \frac{1-x+1}{1-x}dx = x\ln(1-x) + \int \frac{1-x}{1-x}dx + \int \frac{1}{1-x}dx = x\ln(1-x) + \int 1dx + (-1)\int \frac{-1}{1-x}dx =$$
$$= x\ln(1-x) + x - \ln|1-x| + c$$

Esercizio 5

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int arcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$$

$$\int arcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2}dx =$$

$$= xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int \frac{x}{\sqrt{\frac{x+1-x}{x+1}} \cdot 2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$= xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int \frac{x\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$= xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int \frac{x(x+1)}{2\sqrt{x}} \frac{1}{(x+1)^2}dx = xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}(x+1)}dx =$$

$$= xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

Risolviamo con sostituzione l'integrale: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

Poniamo:

$$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt$$

Sostituendo si ha:

$$\int \frac{t}{1+t^2} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = 2\left[\int \frac{t^2+1}{1+t^2} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt\right] = 2\int dt - 2arctgt + c =$$

$$= 2t - 2arctgt + c$$

Quindi l'integrale dato è:

$$\int arcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = xarcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} - arctg\sqrt{x} + c$$