Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Questo metodo viene utilizzato quando la funzione integranda è il prodotto di un **fattore finito** $f(x)$ e di un **fattore differenziale** $g'(x)$.

Si osservi che la scelta del fattore finito e del fattore differenziale è quasi sempre determinante per la riuscita del calcolo e, pur non essendoci una regola generale, in alcuni casi è utile sapere che:

- conviene prendere x^n come fattore finito nelle integrazioni poiché il grado della x diminuisce;
- conviene porre x^n come fattore differenziale nelle integrazioni: $\int x^n \cdot \log x dx$, $\int x^n \cdot arctg dx$.

Esercizio 1

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int xe^x dx$$

Scegliamo un fattore da integrare (detto fattore differenziale) e uno da derivare (detto fattore finito):

- fattore differenziale $f'(x) = e^x$, quindi $f(x) = e^x$
- fattore finito $g(x) = x$, quindi $g'(x)=1$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x \cdot 1dx = xe^x - e^x + c$$

Esercizio 2

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \ln x dx$$

Scegliamo:

- $f(x) = \ln x$ come fattore finito $\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

- $g'(x)=1$ come fattore differenziale $\rightarrow g(x)= x$

L'integrale diventa:

$$\int \ln x dx = x\cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + c$$

Esercizio 3

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int x^2 \cos x dx$$

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot senx - \int 2x senx dx = x^2 senx - 2\int x \cdot senx dx =$$

Applichiamo nuovamente il metodo nell'ultimo integrale:

$$= x^2 senx - 2\int x \cdot senx dx = x^2 senx - 2x \cdot (-\cos x) - 2\int 1 \cdot (-\cos x)\, dx =$$
$$= x^2 senx + 2x\cos x + 2 senx + C$$

Esercizio 4

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int x e^{-x} dx$$

$$\int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) \cdot 1 dx = -e^{-x}x + \int e^{-x} dx = -e^{-x}x - e^{-x} + c$$

Esercizio 5

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int x^2 arctgx dx$$

Procediamo per parti:

$$\int x^2 arctgx dx = arctgx \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

Calcoliamo $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$ dalla divisione dei polinomi si ha:

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int x dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

Pertanto l'integrale dato è:

$$\int x^2 arctgx dx = arctgx \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\left[x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] + c$$