Teorema dell'infinitesimo

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi è convergente se

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

Ovvero se una serie a termini positivi è infinitesima di ordine superiore ad un reale $\alpha > 1$, essa è convergente, se invece è infinitesima di ordine $\alpha \leq 1$, allora diverge.

Esempio 1

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+2}$ è convergente.

Il termine generale della serie è infinitesimo infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+2} = 0$$

Confrontiamo con l'infinitesimo campione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^3+2n+2}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha (n+1)}{n^3+2n+2} = l$$

tale limite è finito $\Leftrightarrow \alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2 > 1$ e dunque per il criterio dell'infinitesimo la serie risulta convergente.

Esempio 2

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{n\sqrt{n}}$ è convergente.

Il limite del termine generale è:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{arctgn}{n\sqrt{n}} = 0$$

e quindi è infinitesimo.

Consideriamo il termine generale in valore assoluto ed osserviamo che:

$$\left| \frac{arctgn}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{\pi/2}{n\sqrt{n}}.$$

Applichiamo il criterio dell'infinitesimo alla serie maggiorante $\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi/2}{n\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi/2}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \frac{n^\alpha}{n^{3/2}} = l$$

Tale limite è finito $\Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2} > 1$ e dunque per il criterio dell'infinitesimo la serie risulta assolutamente convergente.

Esempio 3

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n - \cos n}{n^5 + 5}$ è convergente.

Il termine generale della serie è infinitesimo infatti:

$\lim_{n\to\infty} \frac{7n - \cos n}{n^5 + 5} = 0$ Confrontiamo con l'infinitesimo campione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n - \cos n}{n^5 + 5}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha (7n - \cos n)}{n^5 + 5} \simeq \lim_{x\to\infty} \frac{7n^{\alpha+1}}{n^5} = l$$

tale limite è finito $\Leftrightarrow \alpha + 1 = 5 \Leftrightarrow \alpha = 4 > 1$ e dunque per il criterio dell'infinitesimo la serie risulta convergente.

Esempio 4

Stabilire se la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^2 + n}}$ è convergente.

Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{\ln n}{\sqrt{n^2 + n}} = +\infty$$

e quindi la serie è divergente.