

Criterio del rapporto

Sia $\sum_1^n a_n$ una serie a termini positivi, se:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$ con $h < 1$ allora la serie $\sum_1^n a_n$ è convergente

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$ con $h > 1$ allora la serie $\sum_1^n a_n$ è divergente

Per $h=1$ caso dubbio (vedi Criterio di Raabe)

Esempio 1

Stabilire se la serie $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$ è convergente.

Calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1) n!} =$$

semplifichiamo $(n+1)!$ con $n!$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1) n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$$

La quantità $\frac{1}{e} < 1$, allora per il criterio del rapporto la serie data è convergente.

Esempio 2

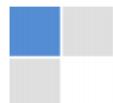
Studiare la serie $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n!}$

Per $x=1$ la serie diventa $\sum_1^\infty \frac{1}{n!}$; tale serie è convergente.

Per x qualunque, sfruttiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1$$

Dunque la serie è convergente.



Esempio 3

Studiare la serie $\sum_1^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$

Calcoliamoci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}(n+1)}{(n+2)} \frac{(n+1)}{nx^n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} = x$$

Per $x = 0$ il limite delle s_n è uguale a 0 pertanto la serie è convergente.

Per $x = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, allora la serie non è convergente, infatti il termine generale

$a_n = \frac{(n+1)x^n}{n}$ non è infinitesimo per n che tende all'infinito.

Per $x < 1$ la serie è convergente, per $x > 1$ è divergente.

Esempio 4

Studiare la serie $\sum_1^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{3^n}$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{(n+1)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{(n+1)(n+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{n-n-1} = \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

Dunque la serie è convergente.

