Dati due insiemi X e Y si dicono separati se $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y \ x \leq y$ cioè ogni elemento di Y è un maggiorante per X; ogni elemento x è un minorante di Y.

X e Y si dicono contigui se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X$ e $\exists y_\varepsilon \in Y / y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$ ovvero

$$\sup X \leq \sup Y$$

Dimostrare che i seguenti insiemi sono separati e contigui:

$$B = \left\{ \frac{sen\left[(-1)^n \pi/2\right]}{n} / n \in \mathbb{N} \right\} \quad C = \left\{ n^2 / n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proviamo che $\forall x \in B$ e $\forall y \in C \ x \leq y$ e lo facciamo con il principio di induzione.

Per n=1 si ha:

$$sen\frac{\pi}{2} = 1$$

Supponiamo vero per *n* e cioè che vale

$$\frac{sen\left[(-1)^n \pi/2\right]}{n} \leq n^2$$

Proviamolo per n+1

$$\frac{sen\left[(-1)^{n+1} \pi/2\right]}{n+1} \leq (n+1)^2$$

La quantità

$$\frac{sen\left[(-1)^{n+1} \pi/2\right]}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq (n+1)^2$$

Dunque è vero per ogni n.

Inoltre essendo il *supB=1 e infC=1 è verificato che* $\sup X \leq \sup Y$

Quindi i due insiemi sono separati e contigui.