Data l'equazione differenziale:

$$y''+9y=xe^{-3x}$$

cerca la soluzione che passa per *P = (0, 1)* ed ha in P retta tangente parallela alla retta *y = 2x*

Trova, se esistono, le soluzioni limitate in *[0, +∞)*

Scriviamo l'equazione omogenea associata:

$y''+9y=0$

Scriviamo il polinomio caratteristico:

$\lambda^2+9=0$

da cui $\lambda=\pm 3i$

Pertanto la soluzione della omogenea associata è:

$$y_0=c_1\cos 3x+c_2 sen 3x$$

Determiniamo l'integrale particolare:

$$\overline{y}=(ax+b)e^{-3x}$$

deriviamo:

$\overline{y}'=ae^{-3x}-3(ax+b)e^{-3x}=e^{-3x}(a-3ax-3b)$

$\overline{y}''=-3e^{-3x}(a-3ax-3b)-3ae^{-3x}=e^{-3x}(-3a+9b+9ax-3a)$

Sostituiamo nella traccia:

$e^{-3x}(-6a+9b+9ax)+9(ax+b)e^{-3x}=xe^{-3x}$

$-6a+9b+9ax+9ax+9b=x$

$-18ax+18b-6a=x$

Applicano il principio di identità dei polinomi si ha:

$$\begin{cases}18a=1\\18b-6a=0\end{cases};\begin{cases}a=1/18\\b=1/54\end{cases}$$

Pertanto:

$\overline{y}=(\frac{1}{18}x+\frac{1}{54})e^{-3x}$

La soluzione dell'equazione data è:

$$y=y_0+\overline{y}$$

$y=c_1\cos 3x+c_2 sen 3x+(\frac{1}{18}x+\frac{1}{54})e^{-3x}$

Determiniamo le costanti.

La derivata della soluzione è:

$$y' = -3c_1 sen3x + 3c_2 \cos 3x + \frac{1}{18}e^{-3x} - 3(\frac{1}{18}x + \frac{1}{54})e^{-3x}$$

Calcolata in zero deve essere 2 (tangente parallela in P alla retta di coefficiente angolare 2)

$$2 = 3c_2 + \frac{1}{18} - 3(\frac{1}{54})$$

ed inoltre:

$1 = c_1 + \frac{1}{54}$ (passaggio per P)

Pertanto:

$c_1 = \frac{53}{54}$ e $c_2 = \frac{2}{3}$