Disequazioni di I grado

La forma generale di una disequazione di primo grado è la seguente:

$ax + b > 0$ (o $ax + b < 0$) con a e b numeri reali.

La soluzione della disequazione si ottiene dai seguenti passaggi:

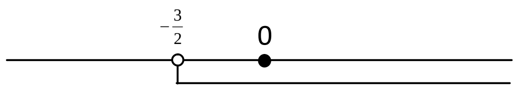
$$ax + b > 0 \;\Rightarrow\; ax > -b \;\Rightarrow\; \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\[2ex] x < -\dfrac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per risolvere la disequazione precedente si sono applicati due principi:

- Primo principio (principio del trasporto): se h e k sono due numeri reali tali che $h > k$, allora anche $h + m > k + m$, con m numero reale qualsiasi.
- Secondo principio: da $h > k$ segue che $hm > km$ se $m > 0$, mentre $hm < km$ se $m < 0$.

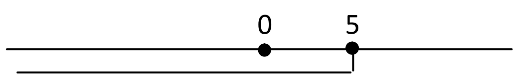
Esempio 1

$$2x + 3 > 0 \;\Rightarrow\; 2x > -3 \;\Rightarrow\; x > -\frac{3}{2}$$



Esempio 2

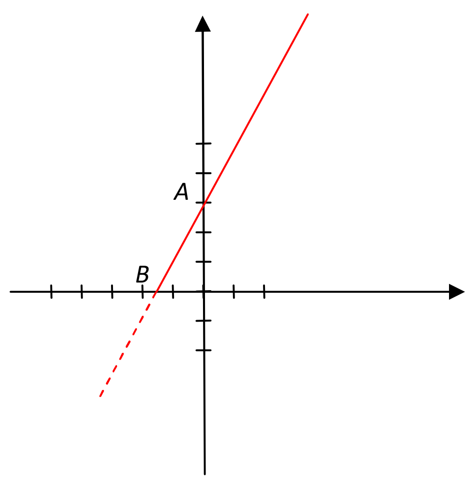
$$-x + 5 \geq 0 \;\Rightarrow\; -x \geq -5 \;\Rightarrow\; x \leq 5$$



Interpretazione geometrica

Alla disequazione $2x + 3 > 0$ si può associare la funzione $y = 2x + 3$ che rappresenta una retta nel piano. Lo studio della disequazione è equivalente allo studio del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y > 0 \qquad \text{(vincolo o restrizione sulla funzione)} \end{cases}$$



La funzione $y = 2x + 3$ interseca gli assi cartesiani nei punti $A \equiv (0, 3)$ e $B \equiv (-3/2, 0)$.

Imporre la condizione $y > 0$ equivale a determinare tutti i punti con ordinata positiva.

Come si vede dalla figura, la parte della retta rappresentata con tratto continuo individua la soluzione della disequazione.

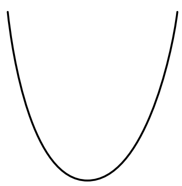
Disequazioni di II grado

La forma generale di una disequazione di II grado è: $ax^2 + bx + c > 0$ (oppure $ax^2 + bx + c < 0$), con a, b, c numeri reali.

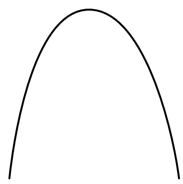
Per studiare la disequazione conviene servirsi del modello geometrico. La funzione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola che ha la concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$ mentre se è $a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso.

In tale studio si esclude il caso $a = 0$ che la farebbe diventare una disequazione di primo grado.

Tale situazione è rappresentata nella figura seguente:



Concavità verso l'alto

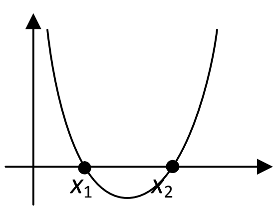


Concavità verso il basso

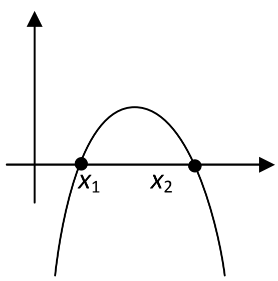
Per stabilire l'intervallo o gli intervalli in cui la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è verificata, bisogna determinare le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$; in base al segno del **discriminante**

$\Delta = b^2 - 4ac$ si hanno le situazioni seguenti:

1. $a > 0$, $\Delta > 0$



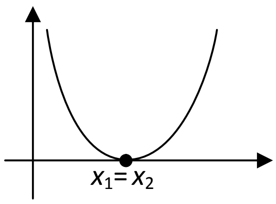
$a < 0$, $\Delta > 0$



La soluzione è $x < x_1$ e $x > x_2$

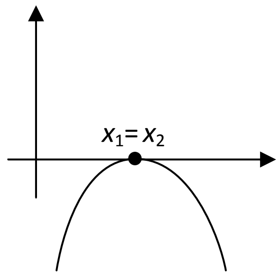
La soluzione è $x_1 < x < x_2$

2. $a > 0,\ \Delta = 0$



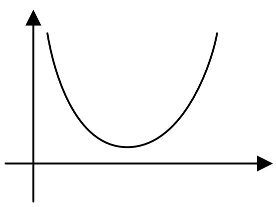
La soluzione è: ogni x escluso x_1

$a < 0,\ \Delta = 0$



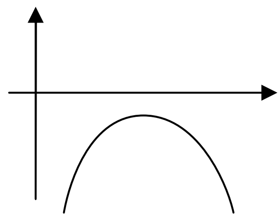
La disequazione non è mai verificata

3. $a > 0,\ \Delta < 0$



La disequazione è sempre soddisfatta

$a < 0,\ \Delta < 0$



La disequazione non è mai soddisfatta.

Esempi:

(In tutti gli esempi, nella rappresentazione grafica:

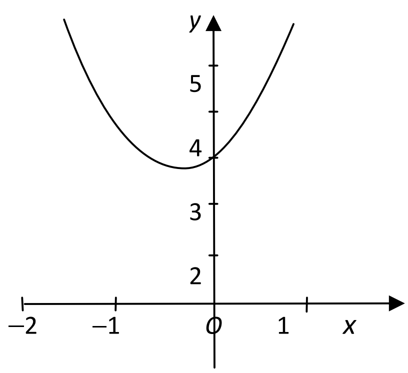
- il tratto continuo indica la zona dove la disequazione è soddisfatta, quello tratteggiato la zona in cui non è soddisfatta
- il pallino pieno indica un punto ammissibile, quello vuoto un punto da escludere).

---

1) $2x^2 + x + 3 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^2 + x + 3 \\ y > 0 \end{cases}$

$a = 2 > 0 \Rightarrow$ concavità verso l'alto

Da $2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4}$

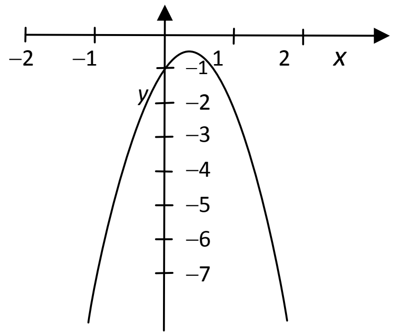


$\Delta = -23 \Rightarrow$ non ha radici reali.

$\Rightarrow$ Disequazione sempre soddisfatta.

---

2) $-4x^2 + 3x - 1 \geq 0$



$$\begin{cases} y = -4x^2 + 3x - 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

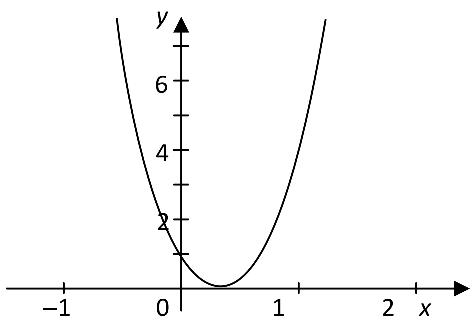
$a = -4 < 0 \Rightarrow$ concavità verso il basso

$-4x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{8}$

$\Delta = -7 \Rightarrow$ non ha radici reali. $\Rightarrow$ mai soddisfatta.

---

3) $9x^2 - 6x + 1 > 0$



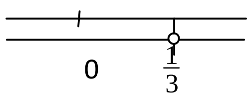
$$\begin{cases} y = 9x^2 - 6x + 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

$a = 9 > 0 \Rightarrow$ concavità verso l'alto

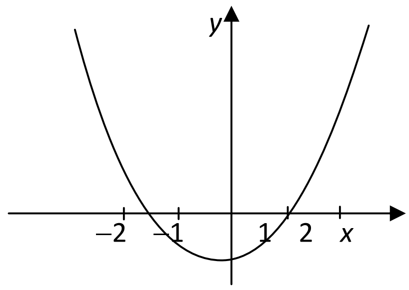
$\Delta = 0$ parabola tangente all'asse x. $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-9}}{9} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ soddisfatta per ogni $x \neq \dfrac{1}{3}$.

Graficamente:



4) $2x^2 + x - 3 < 0$



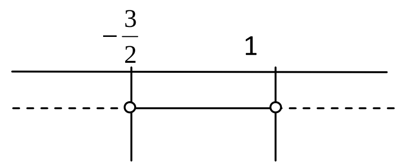
$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 3 \\ y < 0 \end{cases}$$

$a = 2 > 0$ ⇨ concavità verso l'alto

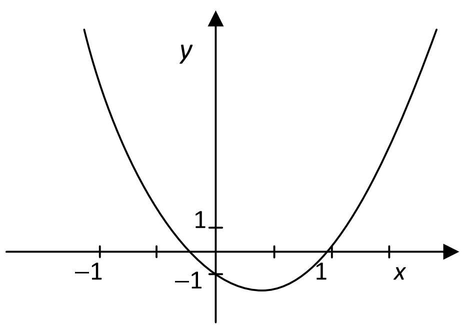
$2x^2 + x - 3 = 0$ ⇨ $x = \dfrac{-\pm\sqrt{1+24}}{4}$

Quindi si annulla per x_1=1, x_2= $-\dfrac{3}{2}$ ⇨ $y < 0$ per $-\dfrac{3}{2} < x < 1$.

Graficamente:



5) $4x^2 - 3x - 1 \geq 0$



$$\begin{cases} y = 4x^2 - 3x - 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

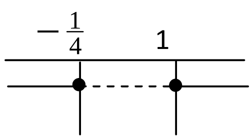
a =4 > 0 ⇨ concavità verso l'alto

$4x^2 - 3x - 1 = 0$ $\Delta = 25 > 0$

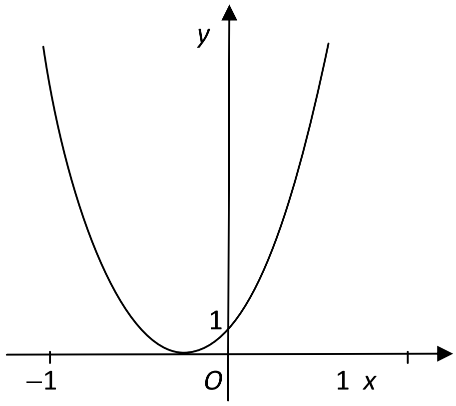
⇨ $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8}$ ⇨ x = 1 e $x = -\dfrac{1}{4}$

⇨ $y \geq 0$ per $x \leq -\dfrac{1}{4}$ e $x \geq 1$.

Graficamente:



6) $16x^2 + 8x + 1 > 0$



$$\begin{cases} y = 16x^2 + 8x + 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

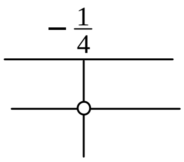
$a = 16 > 0$ ⇨ concavità verso l'alto

$16x^2 + 8x + 1 = 0$ ⇨ $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{16} = -\dfrac{1}{4}$

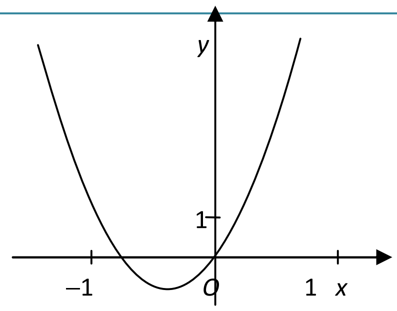
$\Delta = 0$ parabola tangente all'asse delle x

⇨ $y > 0$ per ogni $x \neq -\dfrac{1}{4}$.

Graficamente:



7) $5x^2 + 4x \le 0$



$$\begin{cases} y = 5x^2 + 4x \\ y \le 0 \end{cases}$$

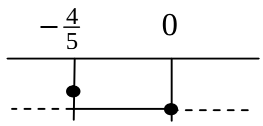
$a = 5 > 0$ ⇨ concavità verso l'alto

$5x^2 + 4x = 0$ ⇨ $x(5x + 4) = 0$

per x_1=0, x_2= $-\dfrac{4}{5}$

$\Delta > 0$ ⇨ $y \le 0$ per $-\dfrac{4}{5} \le x \le 0$.

Graficamente:



Disequazioni fratte

La forma generale di una disequazione fratta è:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \Uparrow 0$$

ove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni nella variabile x.

Sia: $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$. Tale disequazione è definita per $B(x) \neq 0$. Bisogna pertanto escludere i punti per cui si ha $B(x) = 0$.

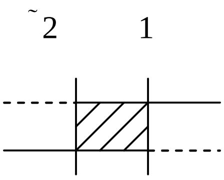
Il rapporto di due quantità reali è positivo se numeratore e denominatore sono contemporaneamente positivi o contemporaneamente negativi. Pertanto la disequazione è equivalente ai due sistemi:

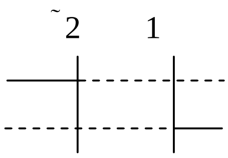
$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Esempi:

1) $\frac{x+2}{x-1} < 0$ deve essere $x \neq 1$ $\Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ Cioè $\begin{cases} x > -2 \\ x < 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$

Soluzione grafica:





La disequazione è verificata per: $-2 < x < 1$

---

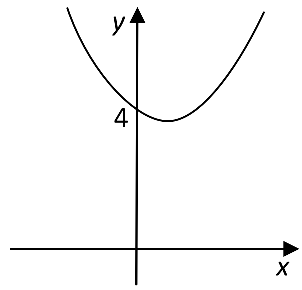
2) $\frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1}$ deve essere $x \neq 1$ e $x \neq 3$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+1}{x-1} < 0 \quad \Rightarrow \frac{(2x-1)(x-1)-(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-1)} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2-2x-x+1-(x^2-3x+x-3)}{(x-3)(x-1)}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+4}{(x-3)(x-1)}<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2-x+4>0 \\ (x-3)(x-1)<0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x^2-x+4<0 \\ (x-3)(x-1)>0 \end{cases}$$

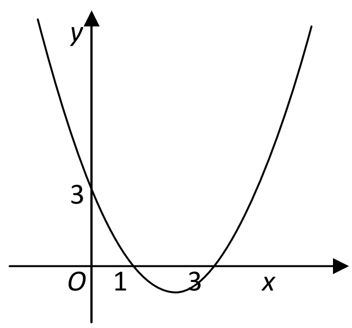
Studiamo le varie parti:



- $x^2\ x + 4 > 0$
  - $x^2\ x + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 > 0$, concavità verso l'alto
  - $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ sempre verificata

Allora i sistemi sono:

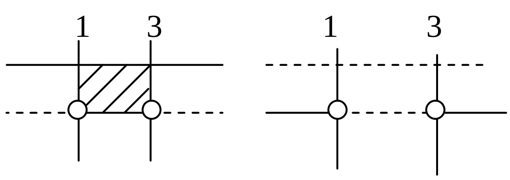
$$\begin{cases} Sempre \\ (x-3)(x-1)<0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} Mai \\ (x-3)(x-1)>0 \end{cases}$$



- $(x\ 3)(x\ 1) < 0$
  - $(x\ 3)(x\ 1) = 0$
  - $a = 1 > 0$, concavità verso l'alto
  - $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 3 \Rightarrow 1 < x < 3$

$\Rightarrow$ I sistemi sono: $\begin{cases} Sempre \\ 1<x<3 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} Mai \\ x<1, \quad x>3 \end{cases}$

Soluzione grafica:



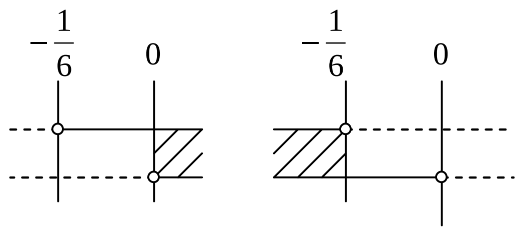
$1 < x < 3$ Mai In conclusione: $1 < x < 3$

---

3) $\dfrac{x-1}{x} < 7$ deve essere $x \neq 0$

⇨ $\dfrac{x-1}{x} - 7 < 0$ ⇨ $\dfrac{x-1-7x}{x} < 0$ ⇨ $\dfrac{-6x-1}{x} < 0$ ⇨ $\dfrac{6x+1}{x} > 0$ ⇨ $\begin{cases} 6x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 6x+1 < 0 \\ x < 0 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{6} \\ x > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x < -\dfrac{1}{6} \\ x < 0 \end{cases}$



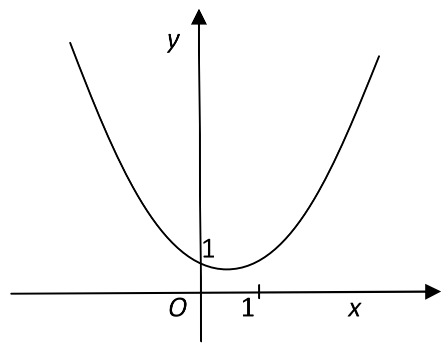
⇨ La disequazione è soddisfatta per $x < -\dfrac{1}{6}$ e $x > 0$

---

4) $\dfrac{x^2}{x-1} \geq 1$ deve essere $x \neq 1$

⇨ $\dfrac{x^2}{x-1} - 1 \geq 0$ ⇨ $\dfrac{x^2 - x + 1}{x-1} \geq 0$ ⇨ $\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 - x + 1 \leq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$

Studio prima disequazione $\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$



⇨ $a = 1 > 0$ ⇨ concavità verso l'alto

⇨ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ⇨ $\Delta < 0$ ⇨ Mai

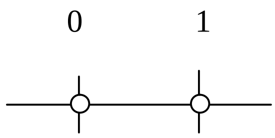
⇨ $\begin{cases} Sempre \\ x > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} Mai \\ x < 1 \end{cases}$

---

5) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^2+1}+\dfrac{5}{(x-1)^2}>0$ deve essere $x \neq 0$ e $x \neq 1$, mentre $x^2 + 1$ non si annulla mai

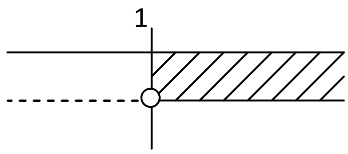
La disequazione è costituita dalla somma di tre termini positivi, quindi il II membro è sempre positivo.

Essa è sempre soddisfatta, eccetto che per $x = 1$ e per $x = 0$.



---

6) $1-\dfrac{1}{x+1}\leq 2+\dfrac{1}{2x-1}$ deve essere $x \neq -1$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$



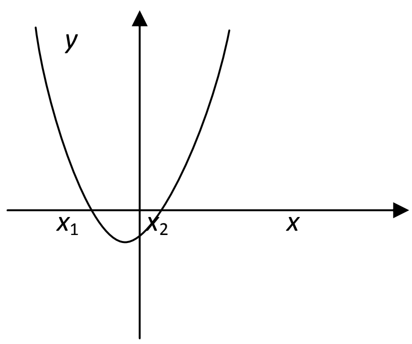
$$\Rightarrow \frac{x+1-1}{x+1}\leq\frac{2(2x-1)+1}{2x-1} \Rightarrow \frac{x}{x+1}\leq\frac{4x-1}{2x-1} \Rightarrow \frac{x}{x+1}-\frac{4x-1}{2x-1}\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(2x-1)-(4x-1)(x+1)}{(x+1)(2x-1)}\leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2-x-4x^2-4x+x+1}{(x+1)(2x-1)}\leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-4x+1}{(x+1)(2x-1)}\leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)(2x-1)}\geq 0$$

Quindi: $\begin{cases}2x^2+4x-1\geq 0\\(x+1)(2x-1)>0\end{cases}$ e $\begin{cases}2x^2+4x-1\leq 0\\(x+1)(2x-1)<0\end{cases}$

Studio di $\begin{cases}y=2x^2+4x-1\\y\geq 0\end{cases}$ è $a = 2 > 0$, $\Delta = 6 > 0$



$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+2}}{2} \Rightarrow x_1=\frac{-\sqrt{6}-2}{2}, \quad x_2=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ se $x\leq\dfrac{-\sqrt{6}-2}{2}$ e $x\geq\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$

Confronto tra	$\frac{\sqrt{6}-2}{2}$	e	$\frac{1}{2}$
Moltiplico ambo i membri per 2	$\sqrt{6}-2$		1
Sommo 2 ad ambo i membri	$\sqrt{6}$		3
elevo al quadrato	6		9

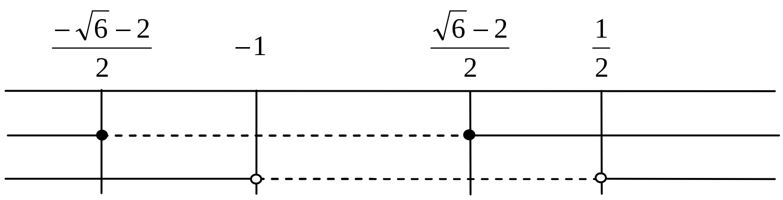
quindi $\frac{\sqrt{6}-2}{2} < \frac{1}{2}$.

I sistemi precedenti ammettono come soluzioni :

$$\begin{cases} x \le \frac{-\sqrt{6}-2}{2}, \quad x \ge \frac{\sqrt{6}-2}{2} \\ x < -1, \quad x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{-\sqrt{6}-2}{2} \le x \le \frac{\sqrt{6}-2}{2} \\ -1 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

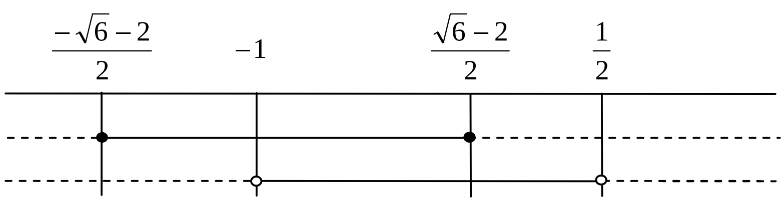
I valori in ordine crescente sono: $\frac{-\sqrt{6}-2}{2}, -1, \frac{\sqrt{6}-2}{2}, \frac{1}{2}$

Soluzione del primo sistema:



Le soluzioni sono: $x \le \frac{-\sqrt{6}-2}{2}, \quad x > \frac{1}{2}$

Soluzione del secondo sistema:



Le soluzioni sono $-1 < x \leq \frac{\sqrt{6}-2}{2}$

La disequazioni ammette quindi soluzioni per $x \leq \frac{-\sqrt{6}-2}{2}, \quad -1 < x \leq \frac{\sqrt{6}-2}{2}, \quad x > \frac{1}{2}$.

Cenno alle disequazioni irrazionali

Per risolvere una disequazione irrazionale, ci si basa sulla seguente osservazione:

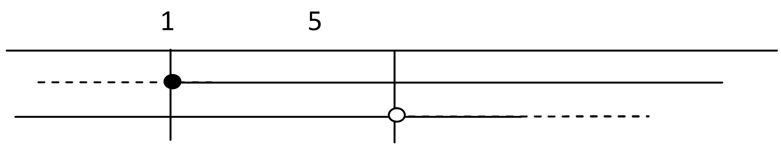
Nel campo reale, ogni radicale di indice pari deve avere il radicando maggiore o uguale a 0, mentre se è di indice dispari, il radicando può assumere qualsiasi valore.

Esempi:

1. $\sqrt{x-1} < 2$. La condizione di realtà è $x-1 \geq 0$, ossia $x \geq 1$.

Sotto tale condizione si possono elevare al quadrato ambo i membri, e la disequazione diviene

$x-1 < 4$, da cui $x < 5$.



La disequazione quindi ammette soluzione nell'intervallo $1 \leq x < 5$.

---

2. $\sqrt{x^2+1} \geq 7$. Siccome il radicando è sempre positivo, si possono elevare al quadrato ambo i membri ottenendo $x^2 + 1 \geq 49$, ossia $x^2 - 48 \geq 0$ che è verificata per $x \leq -4\sqrt{3}$ e per $x \geq 4\sqrt{3}$.

---

3. $\sqrt[3]{2x-1} < -4$. Siccome il radicale ha indice dispari, non si impone nessuna condizione su di esso. Elevando ambo i membri al cubo si ottiene: $2x - 1 < (-4)^3$ da cui $2x < -63$, che è verificata per $x < -\dfrac{63}{2}$.

---

4. $\sqrt{x^2-16} > x+1$.

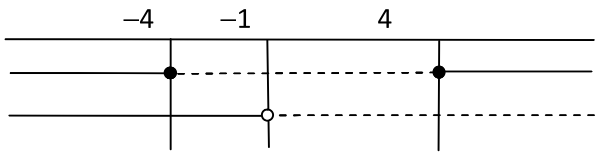
La condizione di realtà del radicale è soddisfatta per $x \leq -4$ e $x \geq 4$. La disequazione di partenza è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 16} > x + 1 \\ x \le -4,\ x \ge 4 \end{cases}.$$

Siccome il secondo membro della disequazione può assumere valori positivi, negativi o nulli, il sistema precedente si scinde nei due casi seguenti (si tenga conto del fatto che il valore $x + 1 = 0$, cioè $x = -1$, è un valore possibile, anche se la disequazione in tale caso non è soddisfatta):

I caso: se $x + 1 < 0$, la disequazione è sicuramente soddisfatta, poiché una quantità positiva è sempre maggiore di una negativa.

In questo caso si ha $\begin{cases} x < -1 \\ x \le -4,\ x \ge 4 \end{cases}$

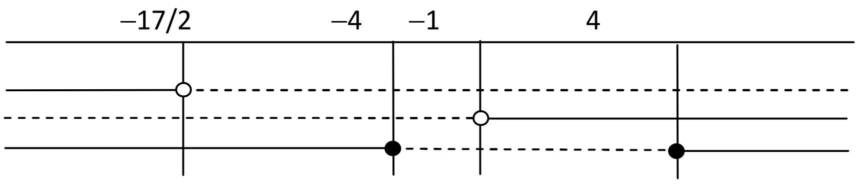


La disequazione è quindi soddisfatta per

$x \le -4$.

II caso: $x + 1 > 0$. In tal caso, elevando al quadrato ambo i membri della disequazione, si ottiene $x^2 - 16 > x^2 + 2x + 1$, da cui $2x + 17 < 0$: le condizioni da soddisfare sono:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x < -\dfrac{17}{2} \\ x \le -4,\ x \ge 4 \end{cases}.$$



Come si vede dallo schema, in tal caso la disequazione non è mai soddisfatta.

Quindi la disequazione originaria è soddisfatta per $x \le -4$.