

L'integrale di $\text{sen}^2 x$ lo si può calcolare in diversi modi.

$$\int \text{sen}^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx = \int dx - \int \cos^2 x dx$$

Dalle formule di duplicazione si ha: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

e quindi

$$\cos^2 x = \cos 2x + \text{sen}^2 x$$

e sostituendo:

$$\int \text{sen}^2 x dx = x - \int (\cos 2x + \text{sen}^2 x) dx$$

$$\int \text{sen}^2 x dx = x - \frac{\text{sen} 2x}{2} - \int \text{sen}^2 x dx$$

e passando l'integrale del secondo membro al primo:

$$2 \int \text{sen}^2 x dx = x - \frac{\text{sen} 2x}{2}$$

da cui:

$$\int \text{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen} 2x}{4} + c$$

O anche con le formule di bisezione

Tenendo conto che:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Sostituendo si ha: $\int \text{sen}^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen} 2x}{4} + c$

O ancora

Ponendo:

$$A = \int \text{sen}^2 x dx \quad B = \int \cos^2 x dx$$

(con le costanti arbitrarie inglobate rispettivamente in A e B) risulta:

$$\int (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) dx = A + B \quad \text{e} \quad \int (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) dx = A - B$$

dal primo integrale si ricava subito che: $A + B = x$

mentre per il secondo:

$$-\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) dx = A - b \quad \text{cioè:} \quad -\int \cos 2x dx = A - B$$

da cui:
$$A - B = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

si ha dunque il seguente sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$A + B = x$$

$$A - B = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

da cui sommando si ottiene:

$$2A = x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \quad \text{e quindi:} \quad A = \int \operatorname{sen}^2 x dx = x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

mentre sottraendo si ottiene l'integrale del $\cos^2 x$.

Oppure per parti

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot \cos x dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx$$

e tenendo conto che: $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e che:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

sostituendo si ha:

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx$$

si passa al primo membro e si ricava l'integrale ricercato