$$\int \frac{x+1}{x^4+1}dx$$

Poiché l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali possiamo scrivere:

$$\int \frac{x+1}{x^4+1}dx = \int \frac{x}{x^4+1}dx + \int \frac{dx}{x^4+1} =$$

Andiamo ora a risolvere i due integrali separatamente.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx =$

Questo integrale è immediato se al numeratore vi fosse la derivata di x^2, pertanto moltiplichiamo e dividiamo per 2, si ha:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}arctg(x^2)$$

Andiamo ora a risolvere il secondo integrale della somma.Tale integrale risulta un pò laborioso ma non difficile.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1} =$

aggiungiamo e sottraiamo al denominatore $2x^2$ in modo da avere un quadrato di binomio e quindi la differenza di due quadrati:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2-2x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1+\sqrt{2x})(x^2+1-\sqrt{2x})} =$$

Adesso procediamo con la decomposizione in somma sfruttando il principio di identità dei polinomi:

$$\frac{1}{(x^2+1+\sqrt{2x})(x^2+1-\sqrt{2x})} = \frac{Ax+B}{(x^2+1+\sqrt{2x})} + \frac{Cx+D}{(x^2+1-\sqrt{2x})} \quad \textbf{(1)}$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+1+\sqrt{2x})} + \frac{Cx+D}{(x^2+1-\sqrt{2x})} = \frac{(Ax+B)(x^2+1-\sqrt{2x})+(Cx+D)(x^2+1+\sqrt{2x})}{(x^2+1-\sqrt{2x})(x^2+1+\sqrt{2x})}$$

Moltiplicando e sommando poi i termini simili si ha.

$$\frac{(A+C)x^3+(\sqrt{2}A-\sqrt{2}C+B+D)x^2+(A+C+\sqrt{2}C-\sqrt{2}D)x+(B+D)}{(x^2+1-\sqrt{2x})(x^2+1+\sqrt{2x})}$$

Per il principio di identità dei polinomi **(1):**

$$\begin{cases} A+C=0 \\ (\sqrt{2}A-\sqrt{2}C+B+D)=0 \\ (A+C+\sqrt{2}C-\sqrt{2}D)=0 \\ (B+D)=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i valori:

$A = -\frac{\sqrt{2}}{4}; B = \frac{1}{2}; C = \frac{\sqrt{2}}{4}; D = \frac{1}{2}$

Pertanto:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2x})} = \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} + \int \frac{(Cx+D)dx}{(x^2+1-\sqrt{2x})} =$$

$$= \int \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2})dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} + \int \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2})dx}{(x^2+1-\sqrt{2x})} =$$

Risolviamo ora il seguente integrale:

$$\textbf{(2.a)} \qquad \int \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx$$

Mettiamo in evidenza $\frac{-\sqrt{2}}{4}$:

$$\int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}(x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx =$$

Ora moltiplichiamo e dividiamo per 2 , al numeratore, poi aggiungiamo e sottraiamo $\sqrt{2}$ in modo da avere la derivata del denominatore:

$$\int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+2\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx = \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int \frac{(2x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx + \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx\right] =$$

Il primo integrale è immediato ed è:

$$\textbf{\textit{(2.a.i)}} \int \frac{(2x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx = \log(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Mentre per risolvere il secondo integrale:

$$\textbf{\textit{(2.a.ii)}} \quad \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx$$

dobbiamo ancora ricorrere a qualche artificio.

Al denominatore aggiungiamo e sottraiamo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ in modo tale che $\sqrt{2}x$ è il doppio prodotto di del binomio $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Quindi:

$$\int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx = \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2})}dx = \int \frac{\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{(2x+\sqrt{2})^2}{4}+\frac{1}{2}}dx =$$

Dividiamo sopra e sotto per 1/2:

$$= \int \frac{2\sqrt{2}}{\frac{(2x+\sqrt{2})^2}{2}+1}dx == \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx = \int \frac{2\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x+1)^2} = 2arctg(\sqrt{2}x+1).$$

Dunque l'integrale ***(2.a)***

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int \frac{(2x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx + \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}dx\right] = -\frac{\sqrt{2}}{8}\log((x^2+1+\sqrt{2}x)+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg(\sqrt{2}x+1)$$

Per risolvere l'integrale

(2.b) $$\int \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2})dx}{(x^2+1-\sqrt{2x})}$$

si procede allo stesso modo, ottenendo:

$$\int \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2})dx}{(x^2+1-\sqrt{2x})} = \frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg(\sqrt{2}x-1)$$

Pertanto l'integrale di partenza

$$\int \frac{x+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}arctg(x^2) - \frac{\sqrt{2}}{8}\log((x^2+1+\sqrt{2}x)+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg(\sqrt{2}x+1)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg(\sqrt{2}x-1)$$