

$$\int \frac{x+1}{x^4+1} dx$$

Poiché l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali possiamo scrivere:

$$\int \frac{x+1}{x^4+1} dx = \int \frac{x}{x^4+1} dx + \int \frac{dx}{x^4+1} =$$

Andiamo ora a risolvere i due integrali separatamente.

$$1. \int \frac{x}{x^4+1} dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2} dx =$$

Questo integrale è immediato se al numeratore vi fosse la derivata di x^2 , pertanto moltiplichiamo e dividiamo per 2, si ha:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2)$$

Andiamo ora a risolvere il secondo integrale della somma. Tale integrale risulta un pò laborioso ma non difficile.

$$2. \int \frac{dx}{x^4+1} =$$

aggiungiamo e sottraiamo al denominatore $2x^2$ in modo da avere un quadrato di binomio e quindi la differenza di due quadrati:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2-2x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)} =$$

Adesso procediamo con la decomposizione in somma sfruttando il principio di identità dei polinomi:

$$\frac{1}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1-\sqrt{2}x)} \quad (1)$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1-\sqrt{2}x)} = \frac{(Ax+B)(x^2+1-\sqrt{2}x) + (Cx+D)(x^2+1+\sqrt{2}x)}{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)}$$

Moltiplicando e sommando poi i termini simili si ha.

$$\frac{(A+C)x^3 + (\sqrt{2}A - \sqrt{2}C + B + D)x^2 + (A + C + \sqrt{2}C - \sqrt{2}D)x + (B + D)}{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)}$$

Per il principio di identità dei polinomi (1):

$$\begin{cases} A+C=0 \\ (\sqrt{2}A - \sqrt{2}C + B + D) = 0 \\ (A + C + \sqrt{2}C - \sqrt{2}D) = 0 \\ (B + D) = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i valori:

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4}; B = \frac{1}{2}; C = \frac{\sqrt{2}}{4}; D = \frac{1}{2}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)} &= \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} + \int \frac{(Cx+D)dx}{(x^2+1-\sqrt{2}x)} = \\ &= \int \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} + \int \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx}{(x^2+1-\sqrt{2}x)} = \end{aligned}$$

Risolviamo ora il seguente integrale:

$$(2.a) \quad \int \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}\right)dx}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}$$

Mettiamo in evidenza $\frac{-\sqrt{2}}{4}$:

$$\int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}(x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx =$$

Ora moltiplichiamo e dividiamo per 2, al numeratore, poi aggiungiamo e sottraiamo $\sqrt{2}$ in modo da avere la derivata del denominatore:

$$\begin{aligned} \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+2\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx &= \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \left[\int \frac{(2x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx + \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx \right] = \end{aligned}$$

Il primo integrale è immediato ed è:

$$(2.a.i) \quad \int \frac{(2x+\sqrt{2})}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx = \log(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Mentre per risolvere il secondo integrale:

$$(2.a.ii) \quad \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1+\sqrt{2}x)} dx$$

dobbiamo ancora ricorrere a qualche artificio.

Al denominatore aggiungiamo e sottraiamo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ in modo tale che $\sqrt{2}x$ è il doppio

prodotto di del binomio $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Quindi:

$$\int \frac{\sqrt{2}}{(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)} dx = \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2})} dx = \int \frac{\sqrt{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{(2x + \sqrt{2})^2}{4} + \frac{1}{2}} dx =$$

Dividiamo sopra e sotto per 1/2:

$$= \int \frac{2\sqrt{2}}{\frac{(2x + \sqrt{2})^2}{2} + 1} dx = \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \int \frac{2\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}x + 1)^2} = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1).$$

Dunque l'integrale **(2.a)**

$$-\frac{\sqrt{2}}{8} \left[\int \frac{(2x + \sqrt{2})}{(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)} dx + \int \frac{\sqrt{2}}{(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)} dx \right] = -\frac{\sqrt{2}}{8} \log((x^2 + 1 + \sqrt{2}x)) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1)$$

Per risolvere l'integrale

$$(2.b) \quad \int \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2})dx}{(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)}$$

si procede allo stesso modo, ottenendo:

$$\int \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2})dx}{(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1)$$

Pertanto l'integrale di partenza

$$\int \frac{x+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) - \frac{\sqrt{2}}{8} \log((x^2 + 1 + \sqrt{2}x)) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{8} \log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1)$$