Grafico della funzione

$$f(x) = x + \frac{\lg|x|}{|x|}$$

Campo di esistenza

$$E \equiv \mathbb{R} - \{0\}$$

Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = (0 - \infty) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Derivata

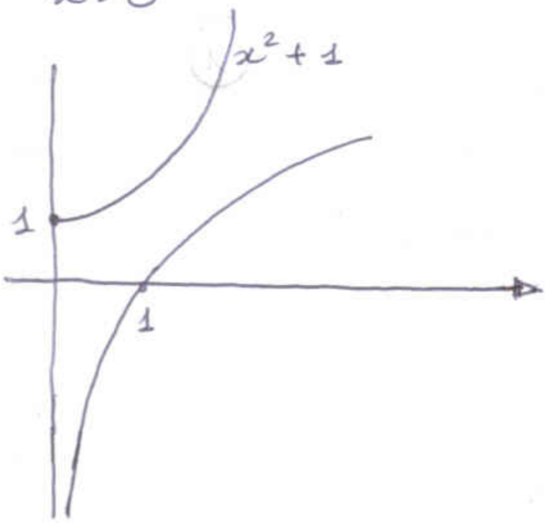
Per $x > 0$ $\quad f(x) = x + \frac{\lg x}{x}$

quindi $\quad f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x} - \lg x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \lg x}{x^2}$

$f'(x) \geq 0 \qquad \frac{x^2 + 1 - \lg x}{x^2} \geq 0 \qquad \begin{cases} x^2 + 1 - \lg x \geq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + 1 \geq \lg x \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$ $\Rightarrow$ questa disep. si risolve graficamente $\Rightarrow$

$x>0$



Come si evince dal grafico x^2+1 è maggiore di $\lg x$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Dunque tornando alla derivata della funzione per $x>0$
$f'(x)>0 \quad \forall x>0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente crescente.

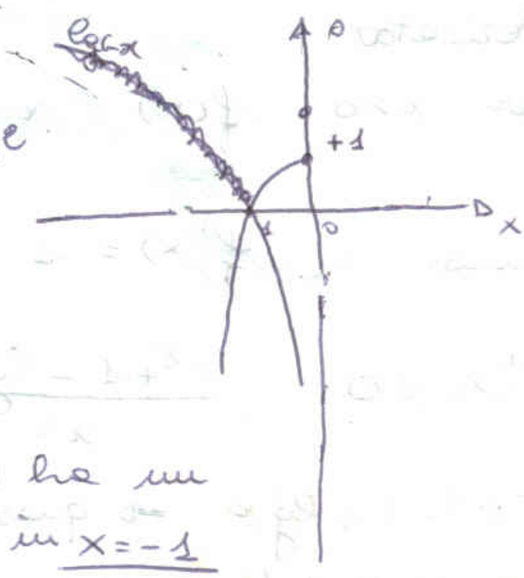
Vediamo cosa accade alla derivata prima se $x<0$

Per $x<0$ $\quad f(x) = x + \frac{\lg(-x)}{-x} = x - \frac{\lg(-x)}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{-1}{-x}\right)x - \lg(-x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \lg(-x)}{x^2}$$

$f'(x) \geq 0$

$$\begin{cases} x^2 - 1 + \lg(-x) \geq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lg(-x) \geq 1 - x^2 \\ x^2 > 0 \quad \forall x \end{cases}$$



$f(x)$ ha un max in $\underline{x=-1}$

Derivata seconda per $x>0$

$$f''(x) = 0 + \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\lg x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-3x + \lg x \cdot 2x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{x(2\lg x - 3)}{x^{\cancel{4}\,3}} \geq 0 \qquad \begin{cases} -3 + 2\lg(x) \geq 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq e^{3/2} \\ x > 0 \end{cases}$$

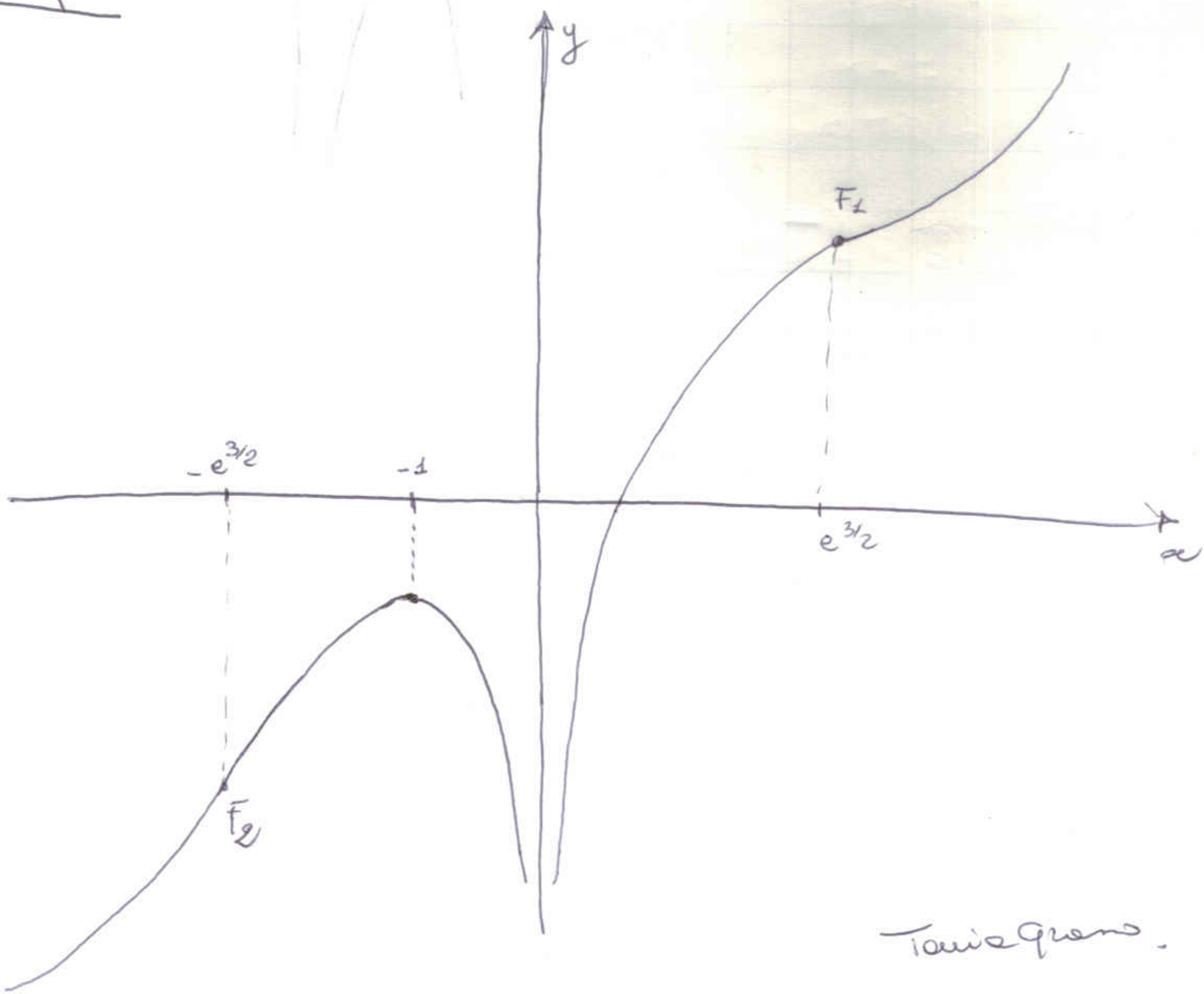
$\underline{\text{in } x = e^{3/2} \ f(x)}$
$\underline{\text{ha un flesso}}$

Derivata seconda per $x<0$

$$f''(x) = \frac{3 - 2\lg(-x)}{x^3}$$

$x = -e^{3/2}$ è un punto di flesso per $f(x)$.

Grafico



Tania Grano.