Studiamo la funzione: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Campo di Esistenza.

$x^2+y^2\geq 0\ \ \forall (x,y)\in R\times R$

La funzione è definita in tutto $R\times R$, è funzione sempre positiva (perché è una radice quadrata); il punto (0,0) è un punto di minimo.

Continuità

Ricordiamo che una funzione è continua in un punto $P_0(x_0,y_0)$ se e solo se esiste un intorno S_P tale che:

$$\forall P(x,y)\in S_p-P_0(x_0,y_0)$$

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

dobbiamo quindi provare che il limite indipendente da P e vale $f(x_0,y_0)$

Proviamo che è continua in (0,0)

1 Modo.

Consideriamo la retta $y=mx$ proviamo che $\forall P(x,y)\in y=mx$ vale $\lim_{P\to P_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=\lim_{P\to P_0}\sqrt{x^2+m^2x^2}=\lim_{P\to P_0} x\sqrt{1+m^2}=0$$

Tale limite è 0 <u>indipendentemente da m</u>.

2 Modo.

Posto $x=\rho\cos\vartheta$ e $y=\rho sen\vartheta$ la nostra funzione diventa:

$$F(\rho,\vartheta)=\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2 sen^2\vartheta}=\rho$$

per cui

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\vartheta)=\lim_{\rho\to 0}\rho=0\quad \underline{\forall\vartheta}.$$

La nostra funzione è continua in (0,0) ed in ogni punto del suo dominio.

Derivabilità

Per essere una funzione derivabile in un punto deve esistere il limite-essere unico-del rapporto incrementale.

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,o)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & seh>0 \\ -1 & seh<0 \end{cases}$$

Lo stesso vale per la derivata parziale

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & seh>0 \\ -1 & seh<0 \end{cases}$$

Allora la $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ non è derivabile in (0,0), è derivabile in qualsiasi altro punto del dominio.

La funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ è quindi continua in (0,0), non è ivi derivabile e quindi non è differenziabile, essa prova che la continuità non implica la derivabilità.