

Studiamo la funzione: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Campo di Esistenza.

$$x^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R \times R$$

La funzione è definita in tutto $R \times R$, è funzione sempre positiva (perché è una radice quadrata); il punto (0,0) è un punto di minimo.

Continuità

Ricordiamo che una funzione è continua in un punto $P_0(x_0, y_0)$ se e solo se esiste un intorno S_p tale che:

$$\forall P(x, y) \in S_p - P_0(x_0, y_0)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

dobbiamo quindi provare che il limite indipendente da P e vale $f(x_0, y_0)$

Proviamo che è continua in (0,0)

1 Modo.

Consideriamo la retta $y = mx$ proviamo che $\forall P(x, y) \in y = mx$ vale $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = \lim_{P \rightarrow P_0} \sqrt{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{P \rightarrow P_0} x \sqrt{1 + m^2} = 0$$

Tale limite è 0 indipendentemente da m.

2 Modo.

Posto $x = \rho \cos \vartheta$ e $y = \rho \sin \vartheta$ la nostra funzione diventa:

$$F(\rho, \vartheta) = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \rho$$

per cui

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \vartheta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0 \quad \underline{\forall \vartheta}$$

La nostra funzione è continua in (0,0) ed in ogni punto del suo dominio.

Derivabilità

Per essere una funzione derivabile in un punto deve esistere il limite-essere unico-del rapporto incrementale.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Lo stesso vale per la derivata parziale

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Allora la $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ non è derivabile in $(0,0)$, è derivabile in qualsiasi altro punto del dominio.

La funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è quindi continua in $(0,0)$, non è ivi derivabile e quindi non è differenziabile, essa prova che la continuità non implica la derivabilità.