Calcoliamo l'integrale $\int arctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right)dx$.

Procediamo con l'integrazione per parti, scegliendo come fattore differenziale il *dx:*

$$\begin{aligned}
&\int arctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right)dx = \\
&= xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int x \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2} \frac{(x+3)-(x+1)}{(x+3)^2} dx = \\
&= xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{x(x+3)^2}{(x^2+6x+9+x^2+2x+1)} \frac{2}{(x+3)^2} dx = \\
&= xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{2x}{(2x^2+8x+10)} dx = \\
&= xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{x}{(x^2+4x+5)} dx =
\end{aligned}$$

Adesso ci troviamo dinnanzi ad un integrale razionale dove il denominatore è indecomponibile, $\Delta<0$, pertanto otterremo un *log* e un *arctg*. Moltiplichiamo e dividiamo per 2, ed aggiungiamo e sottraiamo 4, in modo da avere al numeratore la derivata del denominatore:

$$\begin{aligned}
&xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{x}{(x^2+4x+5)} dx = xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{(x^2+4x+5)} dx = \\
&= xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \left[\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)} dx - \frac{1}{2}\int \frac{4}{(x^2+4x+5)} dx\right] = \\
&= xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2}\log(x^2+4x+5) + 2\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)} =
\end{aligned}$$

Adesso per questo ultimo integrale, aggiungiamo e sottraiamo al denominatore 4in modo da ottenere la derivata di *arctg*, e quindi un integrale immediato:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+4-4+5)} dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arctag(x+2)+c$$

Pertanto il nostro integrale di partenza è:

$$\int arctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right)dx = xarctg\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2}\log(x^2+4x+5) + 2arctg(x+2)+c$$

dott. Tania Grasso