

Calcoliamo l'integrale  $\int \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) dx$ .

Procediamo con l'integrazione per parti, scegliendo come fattore differenziale il  $dx$ :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) dx &= \\ &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int x \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2} \frac{(x+3) - (x+1)}{(x+3)^2} dx = \\ &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{x(x+3)^2}{(x^2 + 6x + 9 + x^2 + 2x + 1)(x+3)^2} dx = \\ &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{2x}{(2x^2 + 8x + 10)} dx = \\ &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{x}{(x^2 + 4x + 5)} dx = \end{aligned}$$

Adesso ci troviamo dinnanzi ad un integrale razionale dove il denominatore è indecomponibile,  $\Delta < 0$ , pertanto otterremo un  $\log$  e un  $\operatorname{arctg}$ . Moltiplichiamo e dividiamo per 2, ed aggiungiamo e sottraiamo 4, in modo da avere al numeratore la derivata del denominatore:

$$\begin{aligned} x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \int \frac{x}{(x^2 + 4x + 5)} dx &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4 - 4}{(x^2 + 4x + 5)} dx = \\ &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \left[ \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 5)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{4}{(x^2 + 4x + 5)} dx \right] = \\ &= x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 4x + 5) + 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)} = \end{aligned}$$

Adesso per questo ultimo integrale, aggiungiamo e sottraiamo al denominatore 4 in modo da ottenere la derivata di  $\operatorname{arctg}$ , e quindi un integrale immediato:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 4 - 4 + 5)} dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \operatorname{arctag}(x+2) + c$$

Pertanto il nostro integrale di partenza è:

$$\int \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) dx = x \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 4x + 5) + 2 \operatorname{arctg}(x+2) + c$$