Studiare l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{0} x e^{\nu x} dx$ al variare di $\nu \in \mathbb{R}$ e calcolarlo se esiste finito.
Che cosa cambia nella risposta se invece di $(0-\infty)$ consideriamo $\int_{0}^{+\infty}$ ?

(i) Valutiamo l'integrale dato per $\underline{\nu > 0}$ agli estremi di integrazione.
–(Ricordiamo che se una funzione $f$ è infinitesima, per $x$ che tende a $\infty$, di ordine maggiore di 1 la funzione è integrabile; mentre se la funzione è infinita, per $x$ che tende a $b$, di ordine ~~maggiore~~ minore di 1 allora non è integrabile.
Dunque:

✓ Se $f$ è infinita per $x \to b$ di ordine $0 < \mu \leq 1$ rispetto all'infinito campione $\frac{1}{b-x}$ allora $f$ è integrabile

✓ Se $f$ è infinitesima di ordine $\mu \geq 1$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$, allora la $f$ è sommabile.)

* $\lim_{x \to -\infty} x e^{\nu x} = 0$ infinitesima

Valutiamo l'ordine

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x e^{\nu x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0$ $\forall \alpha$ poiché $x$ e $e^{\nu x}$ non sono confrontabili ("$e^x$ è più forte di $x$")

$\alpha \geq 1$

Pertanto la $f(x) = x e^{\nu x}$ con $\nu > 0$ è integrabile in 0

* $\lim_{x \to 0} x e^{\nu x} = 0$ infinitesima

$\lim_{x \to 0} \frac{x e^{\nu x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha+1} \cancel{e^{\nu x}}^{1} = 0$ per $\underline{(\alpha+1) > 0}$ $\alpha > -1$ !

Per $\nu < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{\nu x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x e^{\nu x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ non è integrabile

$\lim\limits_{x \to 0} x e^{\nu x} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x e^{\nu x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = 0 \quad \alpha > -1$

Dunque $f$ è integrabile per $\nu > 0$ e

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{\nu x} dx \overset{\text{per parti}}{=} \left[ \frac{e^{\nu x}}{\nu^2} (\nu x - 1) \right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{\nu^2}$$

Per $\nu < 0$ la $f$ non è integrabile.

Se cambiamo l'intervallo di integrazione la funzione è integrabile per $\nu < 0$.