Studiare l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{0} x e^{\nu x} dx$ al variare di $\nu \in \mathbb{R}$ e calcolarlo se esiste finito.

Che cosa cambia nella risposta se invece di $(0-\infty)$ consideriamo $\int_{0}^{+\infty}$?

(i) Valutiamo l'integrale dato per $\underline{\nu > 0}$ agli estremi di integrazione.

-(Ricordiamo che se una funzione f è infinitesima, per x che tende a ∞, di ordine maggiore di 1 la funzione è integrabile; mentre se la funzione è infinita, per x che tende a b, di ordine ~~[illegible]~~ minore di 1 allora non è integrabile.

Dunque:

✓ Se f è infinita per $x \to b$ di ordine $0<y\leq 1$ rispetto all'infinito campione $\frac{1}{b-x}$ allora f è integrabile

✓ Se f è infinitesima di ordine $y \geq 1$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$, allora la f è sommabile.)

* $\lim_{x\to-\infty} x e^{\nu x} = 0$ infinitesima

Valutiamo l'ordine

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x e^{\nu x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = 0 \quad \forall \alpha$$ poichè x e $e^{\nu x}$ non sono confrontabili ("e^x è più forte di x")

$\alpha \geq 1$

Pertanto la $f(x) = x e^{\nu x}$ con $\nu > 0$ è integrabile in 0

* $\lim_{x\to 0} x e^{\nu x} = 0$ infinitesima

$$\lim_{x\to 0} \frac{x e^{\nu x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha+1} e^{\nu x} = 0$$ per $\underline{(\alpha+1)>0}$ $\alpha > -1$!

Per $\nu<0$

$\lim_{x\to-\infty} x e^{\nu x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{x e^{\nu x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ non è integrabile

$\lim_{x\to 0} x e^{\nu x} = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \frac{x e^{\nu x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = 0 \quad \alpha > -1$

Dunque f è integrabile per $\nu>0$ e

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{\nu x} dx \overset{\text{per parti}}{=} \left[\frac{e^{\nu x}}{\nu^2} (\nu x - 1) \right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{\nu^2}$$

Per $\nu<0$ la f non è integrabile.

Se cambiamo l'intervallo di integrazione la funzione è integrabile per $\nu<0$.