1° APPELLO SESSIONE ESTIVA 2005-2006
Prova scritta del 12/06/2006
Tema D

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Ricerca del Dominio della funzione:
La condizione di esistenza è $x \neq -1$, per cui:

$$D_f = \{\forall x \in R : x \neq -1\}$$

oppure in termini d'intervallo:

$$]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]-1,\ +\infty[$$

la funzione non presenta alcuna simmetria.

Limiti agli estremi del Dominio e ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}} = e \qquad \Rightarrow \quad y=e \qquad \text{Asintoto orizzontale completo}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = e^{\frac{-2}{0^-}} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \Rightarrow \quad x=-1 \qquad \text{Asintoto verticale sinistro}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = e^{\frac{-2}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+$$

pertanto la funzione per x=-1 presenta una discontinuità di 2° specie.

Positività della funzione ed intersezione con gli assi:

$$f(x) \succ 0 \qquad \forall x \in D$$

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

ciò significa che il grafico della funzione si svolgerà tutto al di sopra dell'asse delle ascisse e non lo incontrerà :L'intersezione con l'asse delle ordinate è $\left(0\ ,\ \frac{1}{e}\right)$

Ricerca della monotonia dei massimi e dei minimi:

$$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \frac{2}{(x+1)^2}$$

che risulta positiva $\quad \forall x \in D$
pertanto la funzione è sempre crescente per $x \prec -1 \vee x \succ -1$
e non presenta né minimi né massimi.

Ricerca della concavità e dei flessi:

$$f''(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{2}{(x+1\ )^2}\right)^2 + e^{\frac{x-1}{x+1}}\frac{-4}{(x+1)^3} = e^{\frac{x-1}{x+1}}\left[\frac{4}{(x+1)^4} - \frac{4}{(x+1)^3}\right] = e^{\frac{x-1}{x+1}}\left[\frac{4-4x+4}{(x+1)^4}\right] = 4e^{\frac{x-1}{x+1}}\left[\frac{2-x}{(x+1)^4}\right]$$

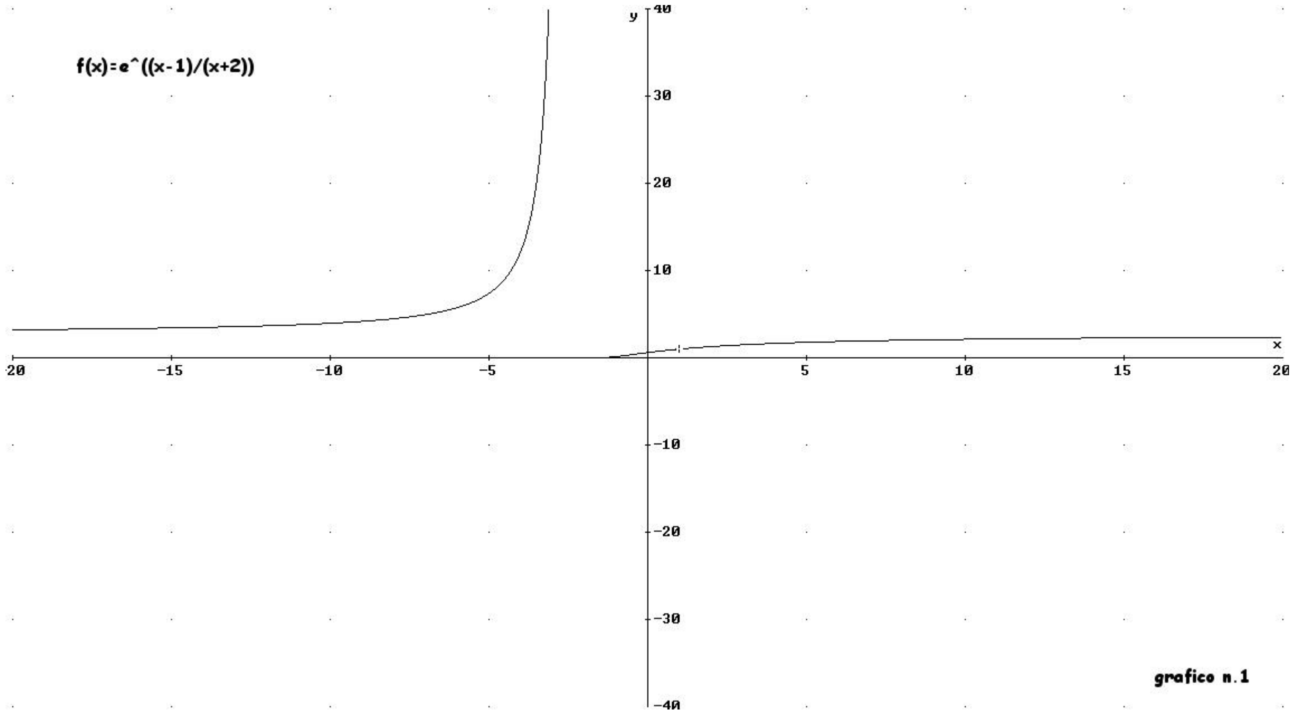
dove $4e^{\frac{x-1}{x+1}}\left[\frac{1}{(x+1)^4}\right] \succ 0 \qquad \forall x \in D$

pertanto il segno della derivata seconda dipende solo dal numeratore:

$$2 - x \succ 0 \qquad \Rightarrow \quad x \prec 2$$

La funzione volge la concavità verso l'alto per $x \prec -1$ e $-1 \prec x \prec 2$, mentre volge la concavità verso il basso altrove. La funzione presenta un flesso nel punto: $\left(2\ ,\sqrt[3]{e}\right)$.
Tutti gli elementi determinati per via analitica sono rappresentati nel grafico n.1

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it



Dire se la successione di termine generale

$$n^{\alpha}\left[\ln\left(n^{\alpha}+1\right)-\alpha\ln n\right] \qquad \text{con } \alpha \succ 0$$

È regolare

Per rispondere al quesito bisogna vedere se il termine generale ammette limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\left[\ln\left(n^{\alpha}+1\right)-\ln n^{\alpha}\right]=\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\left[\ln\frac{n^{\alpha}+1}{n^{\alpha}}\right]=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)^{m^{\alpha}}=\ln e=1$$

la successione è quindi regolare convergente.

Calcolare l'integrale

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

Integrando per parti scegliendo come fattore differenziale xdx e come fattore finito arctgx si ha:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg} x + c = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + c$$

V.O. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3}{n-2} e^{-n}$$

Intanto si osservi che la serie si può riscrivere:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3}{(n-2)e^n}$$

per determinarne il carattere, si ricorre al criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^3}{(n-1)e^{n+1}} \frac{(n-2)e^n}{n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \frac{n\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n^3} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} \prec 1$$

pertanto la serie data è convergente.

Tema B

Studiare la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{|1+x|}$$

Osservato che:

$$|1+x| \geq 0 \qquad \forall x \in R$$

il dominio è proprio R.

<u>Limiti agli estremi del Dominio e ricerca degli asintoti:</u>

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to \pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \mp\infty$$

La funzione non presenta asintoti di alcun genere.

Riscriviamo la funzione senza il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{1+x} & \text{per } x \geq -1 \\ x - \sqrt{-1-x} & \text{per } x \prec -1 \end{cases}$$

<u>Si consideri il ramo per $x \geq -1$:</u>

Derivando:

$$f' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}}$$

il segno della derivata prima dipende dalla seguente disequazione:

$$2\sqrt{1+x} - 1 \succ 0 \qquad \sqrt{1+x} \succ \frac{1}{2} \qquad 1 + x \succ \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow x \succ -\frac{3}{4}$$

ovviamente questo risultato indica che nel ramo considerato c'è la presenza di un minimo relativo di coordinate $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$,

si osservi inoltre che:

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -\infty$$

Si consideri la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$$

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

ovviamente positiva nell'intervallo considerato, pertanto il ramo volgerà la concavità verso l'alto e non presenterà alcun flesso.

Si consideri il ramo per $x \prec -1$:

La derivata prima è:

$$f^{'}(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{-1-x}}$$

ovviamente positiva nell'intervallo

$$\left] -\infty, \ -1 \right[$$

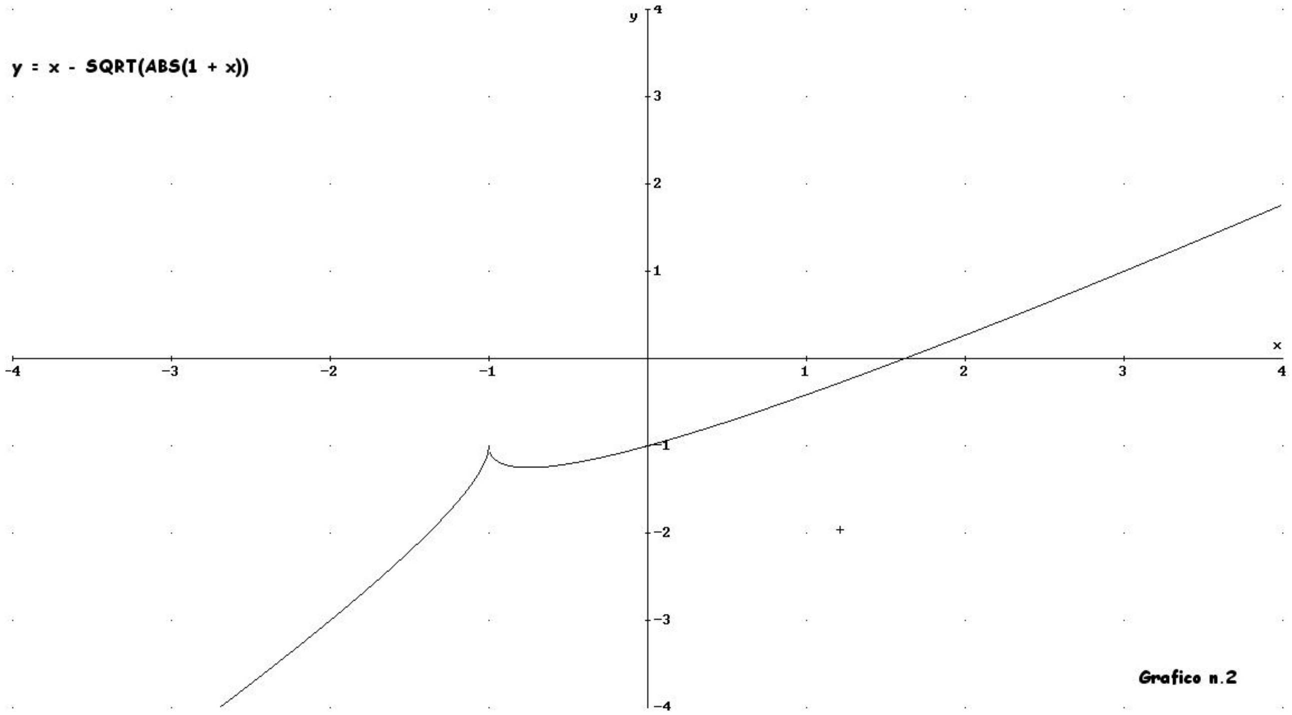
e pertanto sempre crescente,si osservi inoltre che:

$$\lim_{x \to -1^{-}} f^{'}(x) = +\infty$$

Si calcoli la derivata seconda:

$$f^{''}(x) = \frac{1}{4\sqrt{(-1-x)^3}}$$

essa risulta sempre positiva e pertanto questo ramo volgerà la concavità verso l'alto.
Infine, bisogna osservare che il punto cuspidale (-1 , -1) è anche un punto di massimo relativo anche se la derivata non esiste.



Dire se la successione di termine generale

$$\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^{\sqrt{n}}$$

È regolare.

Per rispondere al quesito, bisogna ricercare se esiste il limite del termine generale per $n \to +\infty$, si ha successivamente:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\frac{n}{\ln n}}\right]^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

quindi la successione è regolare convergente.

Ricorda che $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n} = +\infty$ e che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$.

Calcolare l'ìntegrale

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Integrando per parti scegliendo come:
fattore differenziale 1dx
fattore finito $\sqrt{1-x^2}$
si ha:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \mathrm{arcsen}x$$

Osservando che l'integrale di partenza si trova anche a secondo membro, passandolo a primo membro si ha:

$$2\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{arcsen}x$$

pertanto

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) + c$$

V.O. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \; \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

Per determinare il carattere della serie assegnata,conviene ricorrere al criterio di convergenza della serie maggiorante: Infatti il teorema dice che se la maggiorante converge anche la minorante. Allora basta osservare che vale la seguente relazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{4^n} \quad \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} \right| \prec \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{4^n} \quad \frac{2n^2 - 3 + 2}{n^2 + 1} \right| =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{2}{} - \frac{3}{n^2 + 1} \right) \prec \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \; \frac{2}{}$$

poiché quest'ultima è convergente,perché serie geometrica di ragione ¼ a maggior ragione converge la serie data.

Tema B 1

Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Dominio $\forall x \in R$,
poiché:

$$f(x) = f(-x)$$

la funzione è pari.
Lo studio sarà condotto sull'intervallo $[0, +\infty[$.
L'altro ramo sarà ottenuto in base alla nota simmetria con l'asse delle ordinate.

<u>Limiti agli estremi della restrizione e ricerca degli asintoti:</u>

f(0)=1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

non presenta alcun asintoto.

Positività della funzione ed intersezione con gli assi:
Poiché la funzione risulta non negativa (il radicando è un quadrato). La funzione risulta nulla nei punti in cui si annulla il radicando cioè in (1, 0) punto di minimo assoluto.

Ricerca della monotonia dei massimi e dei minimi:

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

positiva per $x \succ 1$ e quindi ivi la funzione risulterà crescente, negativa altrove nella restrizione e quindi la funzione risulterà decrescente per $0 \prec x \prec 1$.
Pertanto si ha:

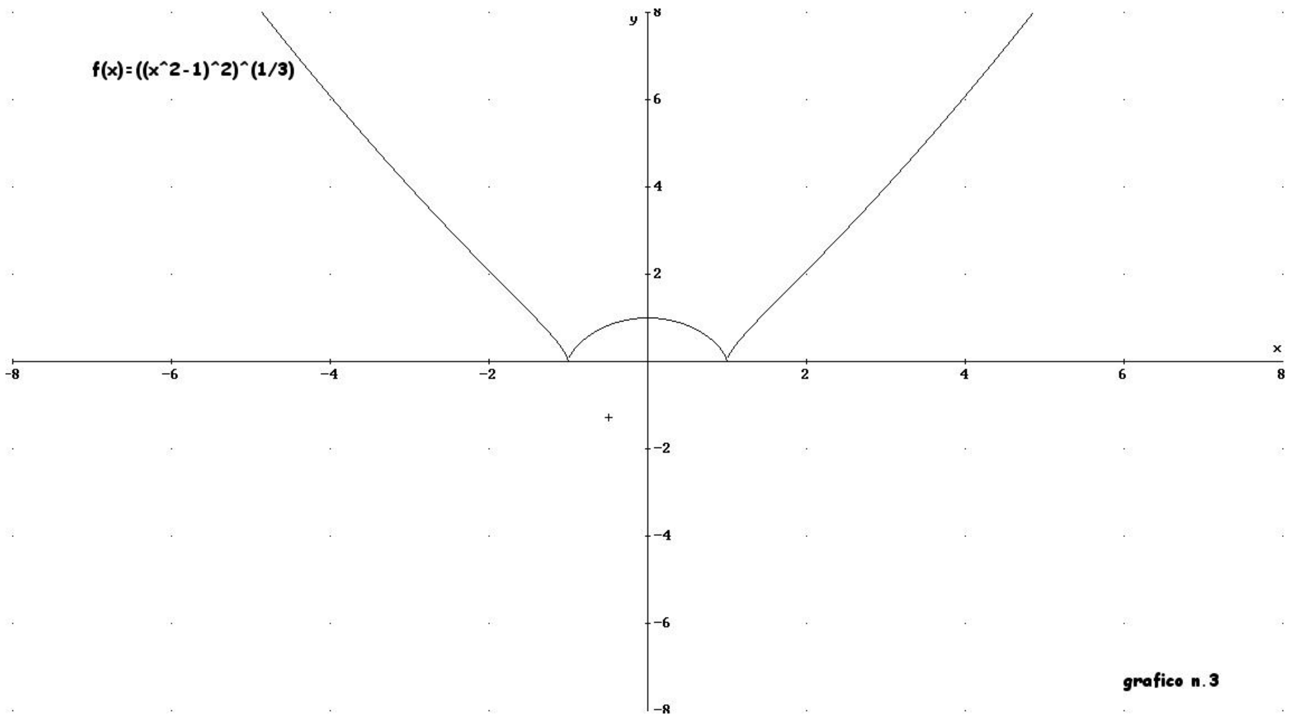
M(0, 1) e m(1, 0)

Ricerca della concavità e dei flessi:

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{\dfrac{12\sqrt[3]{x^2 - 1}}{} - \dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{4(x^2 - 3)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

dallo studio del segno risulta che volge la concavità verso il basso per:
$0 \prec x \prec \sqrt{3}$
mentre verso l'alto per:
$x \succ \sqrt{3}$
e quindi si ha un flesso nel punto $\left(\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}\right)$.
Infine c'è da segnalare che il punto di minimo (1, 0) è un punto di cuspide in quanto la derivata dalla destra tende a + ∞ e la derivata dalla sinistra a -∞.
L'altro ramo sarà ottenuto ribaltando di 180° gradi attorno l'asse delle ordinate.
Il grafico e il n.3.



Determinare i parametri a,b,c in modo che il sistema lineare

$$\begin{cases}(b-a)x + (a-b)y + cz = 1\\ ax + bz = 0\\ (a+c)x + (a+b)y - bz = 1\end{cases}$$

Ammette le soluzioni x=1 y=2 z=1

Sostituendo la terna di soluzioni assegnata il sistema si trasforma in un sistema lineare nelle incognite a,b,c:

$$\begin{cases}(b-a) + (a-b)2 + c = 1\\ a + b = 0\\ (a+c) + (a+b)2 - b = 1\end{cases}$$

Osservando che dalla seconda equazione a=-b il sistema si riduce a due incognite:

$$\begin{cases}-2b + c = 1\\ -2b + c = 1\end{cases}$$

le due equazioni del sistema coincidono, quindi esso è indeterminato con ∞^1.
Pertanto,risolvendo l'equazione rispetto a c e ponendola uguale ad un valore reale a piacere, le soluzioni sono:

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$\begin{cases} a = \dfrac{1 - k}{2} \\ b = \dfrac{k - 1}{2} \\ c = k \qquad\qquad \text{con } k \in R \end{cases}$$

Trovare i massimi e i minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + (1 + x + y)^3$$

Ricerca dei punti critici:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \\ 3y^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

risolvendo e semplificando si ha:

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + 2x + 2y = -1 \\ x^2 + 2xy + 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

sottraendo alla prima equazione la seconda si ha: $y^2 - x^2 = 0$ che ha per soluzioni y=x e y=-x.
Si metta,alternativamente a sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ 3y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

con soluzione i punti stazionari (-1, -1) e (-1/3, -1/3).

$$\begin{cases} y = -x \\ -y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

con soluzione i punti critici (1, -1) e (-1, 1).

L'hessiano generale è:

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$H=\begin{vmatrix} 2y+2 & 2y+2x+2 \\ 2y+2x+2 & 2x+2 \end{vmatrix}$$

E lo si calcola nei punti critici già trovati:

$$H(-1,-1)=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

il punto (-1, -1) è di sella.

$$H(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})=\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix}=\frac{16}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}\succ 0$$

è un punto di minimo relativo.

$$H(1,-1)=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-4\prec 0$$

il punto (1, -1) è di sella.

$$H(-1,1)=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\prec 0$$

il punto (-1, 1) è di sella.

Tema A 1

Studiare la funzione:

$$f(x)=x^3 \ln x$$

La condizione di esistenza è che x sia strettamente positiva il Dominio quindi è: $]\ 0,\ +\infty\ [$.

<u>Limiti agli estremi del dominio e ricerca degli asintoti:</u>

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x$$

il limite presenta la forma indeterminata $\infty.0$

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

Si procede ad un cambio di variabile:

$$\text{posto} \quad \frac{1}{x} = t \quad \text{per} \quad x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad t \to +\infty$$

nella nuova variabile il limite è:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t^{-1}}{t^3} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t^3} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \ln x = +\infty$$

La funzione non presenta alcun asintoto.

Positività della funzione ed intersezione con gli assi:

Poiché x^3 è sempre positivo nel dominio il segno dipende da $\ln x$, pertanto nell'intervallo
$]\,1,\ +\infty\,[$ f(x) è positiva ,
per $x \in \,]0,1[$ f(x) è negativa

il grafico della funzione si svolgerà tutto al di sopra dell'asse delle ascisse per $x \succ 1$.
L'intersezione con l'asse dell'ascisse è $(1\ ,\ 0)$.
Non c'è intersezione con l'asse delle ordinate perché per x=0 la funzione non è definita.

Ricerca della monotonia dei massimi e dei minimi:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$$

che risulta positiva per $3\ln x + 1 \succ 0$ $\quad \ln x \succ -\frac{1}{3}$ $\quad$ cioè $x \succ e^{-\frac{1}{3}}$ o $x \succ \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ intervallo in cui la funzione è crescente (decrescente per $0 \prec x \prec \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$) pertanto il punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\ -\frac{1}{3e}\right) \text{è di minimo assoluto.}$$

Ricerca della concavità e dei flessi:

$$f''(x) = 6x\ln x + 5x = x(6\ln x + 5)$$

poiché x è sempre positiva nel dominio il segno della derivata seconda dipende dalla seguente disequazione logaritmica:

$6\ln x + 5 \succ 0 \quad \ln x \succ -\frac{5}{6}$ cioè $x \succ e^{-\frac{5}{6}}$ concludendo la funzione presenta concavità verso l'alto per l'intervallo $\left] e^{-\frac{5}{6}},\ +\infty \right[$ verso il basso nell'intervallo $\left] 0,\ e^{-\frac{5}{6}} \right[$ per cui per x= $e^{-\frac{5}{6}}$ la funzione presenta flesso.

La funzione è rappresentata nel grafico è il n. 4.

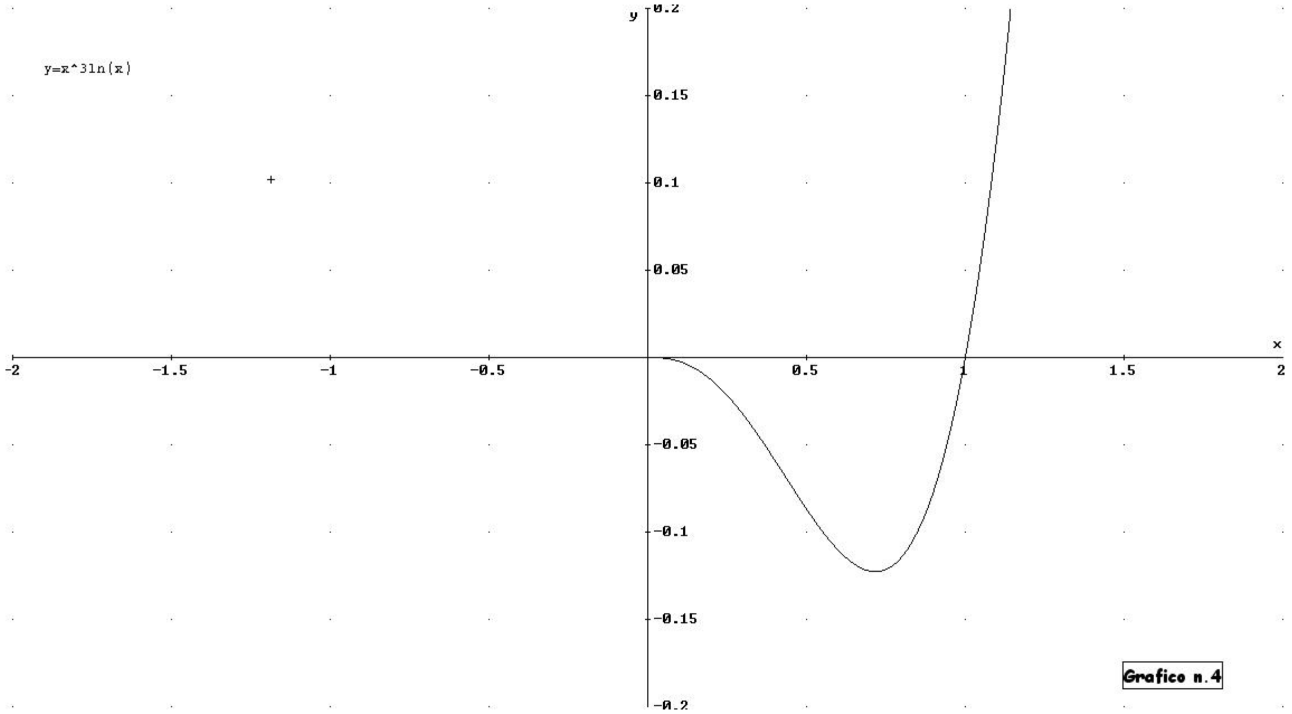


Grafico n.4

Discutere il sistema e determinarne le soluzioni per ogni valore di del parametro λ

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del si sistema è:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda + \lambda - 1 - \lambda^3 - 1 = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$$

Ponendo $-\lambda^3 + 3\lambda - 2 \neq 0$ il sistema è normale ed ammette una ed una sola soluzione che si piò calcolare con Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda + 1 - 1 - \lambda^2 - 1 = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda + 1 - 1 - \lambda^2 - 1 = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + \lambda + 1 - 1 - \lambda^2 - 1 = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{-\lambda^3 + 3\lambda - 2} = \frac{1}{\lambda + 2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{-\lambda^3 + 3\lambda - 2} = \frac{1}{\lambda + 2}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{-\lambda^3 + 3\lambda - 2} = \frac{1}{\lambda + 2}$$

Esaminando i casi in cui risulta $-\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$ scomponendo con la regola di Ruffini si ottengono le seguenti soluzioni λ=-2 e λ=1 (soluzione doppia).
Per λ=-2 consideriamo un minore della matrice completa,per esempio quello ottenuto sostituendo la colonna dei termini noti a quella dei coefficienti della x,indi si ha:

$$Min = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 - 1 - 4 - 1 = -9 \neq 0$$

il sistema risulta incompatibile per il teorema di Rouchè-Capelli in quanto il rango della matrice dei coefficienti è uguale a due (per verificarlo basta estrarre un minore del secondo ordine) mentre il rango della matrice completa è uguale a tre.
Per λ=1 le tre equazioni coincidono e quindi il sistema diventa indeterminato con ∞^2 soluzioni. Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 1 - h - k \\ y = h \\ z = k \qquad \text{con } k, h \in R \end{cases}$$

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^2y^2 - \ln y$$

E classificarne la natura.

Ricerca dei punti stazionari:

$$\begin{cases} 2xy^2 - x\ln y = 0 \\ 2yx^2 - \dfrac{x}{y} = 0 \end{cases}$$

risolvendo la seconda equazione si ha:

$$2x^2y^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2y^2x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0, \quad x = \frac{1}{2y^2}$$

Si considerino ogni soluzione a sistema con la prima equazione si ha:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \ln y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,1)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2y^2} \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e \\ x = \dfrac{1}{2e^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2e^2}, e\right)$$

trovati i due punti critici si calcoli l'hessiano generale:

$$H = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy - \dfrac{1}{y} \\ 4xy - \dfrac{1}{y} & 2x^2 + \dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix}$$

Si calcoli l'hessiano nei punti critici trovati:

$$H(0,1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \prec 0 \qquad \text{punto di sella.}$$

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

$$H\left(\frac{1}{2e^2}, e\right) = \begin{vmatrix} 2e^2 & \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e} & \frac{1}{e^4} \end{vmatrix} = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2} \succ 0 \quad \text{punto di minimo relativo.}$$

Tema A

Studiare la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{2+x}{2-x}}$$

Per determinare il dominio della funzione basta porre $2\text{-}x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 2$, ovvero in termini d'intervallo: $\left]\, -\infty,\ 2 \,\right[\cup \left]\, 2,\ +\infty \,\right[$.
La funzione risulta positiva per x positivo e negativa per x negativo,pertanto passa per l'origine.

<u>Condizioni agli estremi del dominio e ricerca degli asintoti:</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 \qquad \text{asintoto verticale sinistro}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{1}{e}x\right) = \lim_{x\to\infty} x e^{-1}\left(e^{\frac{2+x}{2-x}+1} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x e^{-1}\left(e^{\frac{4}{2-x}} - 1\right)$$

pongo $\quad x=\frac{1}{t}$ per $x \to \infty$ succede che $t \to 0$.

Nella nuova variabile il limite diventa:

$$\lim_{t\to 0} e^{-1} \frac{e^{\frac{4}{2-\frac{1}{t}}} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} e^{-1} \frac{e^{\frac{4t}{2t-1}} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} e^{-1} \frac{1}{t} \frac{4t}{2t-1} \frac{e^{\frac{4t}{2t-1}} - 1}{\frac{4t}{2t-1}} = -4e^{-1}$$ indi la funzione è

dotata di asintoto obliquo:

$$y = \frac{1}{e}x - \frac{4}{e}$$

Ricerca della monotonia e massimi e minimi:

$$f'(x) = e^{\frac{2+x}{2-x}} + x\,e^{\frac{2+x}{2-x}}\frac{4}{(2-x)^2} = e^{\frac{2+x}{2-x}}(1 + \frac{4}{(2-x)^2}) = e^{\frac{2+x}{2-x}}(\frac{4+x^2}{(2-x)^2})$$

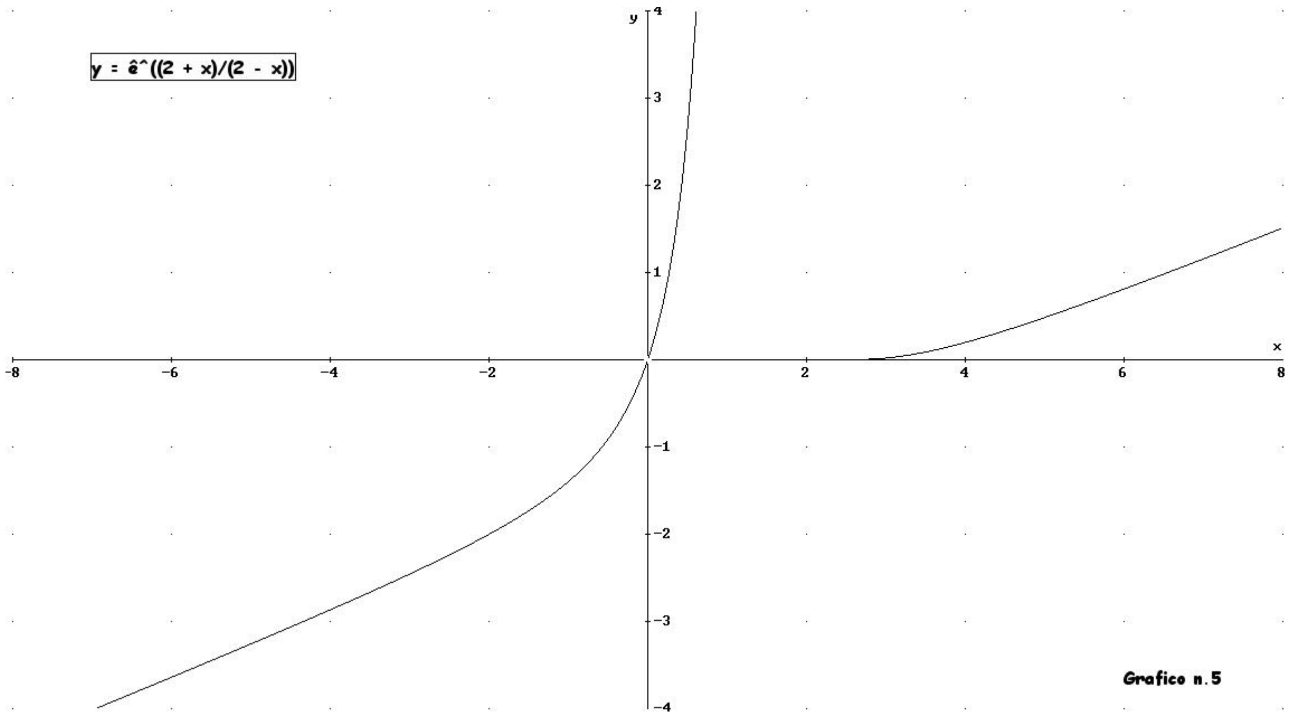
essa risulta sempre positiva nel dominio, pertanto la funzione è sempre crescente non presenta né minimi né massimi.

Ricerca della concavità e dei flessi:

$$f''(x) = e^{\frac{2+x}{2-x}}(\frac{4+x^2}{(2-x)^2})^2 + e^{\frac{2+x}{2-x}}\left[\frac{2x(2-x)^2 + (4+x^2)2(2-x)}{(2-x)^4}\right] = e^{\frac{2+x}{2-x}}\frac{x^4 + 4x^2 + 32}{(2-x)^4}$$

la derivata seconda è palesemente positiva , quindi la funzione volgerà la concavità verso l’altro sempre e non presenta flessi.

Il grafico è:



Dire se la successione di termine generale $\dfrac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}}$

È regolare.

La regolarità si determina mediante il calcolo del limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = a^0 = 1$$ il limite ad esponente vale zero

perché:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}+x} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}+x} dx = \int \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} dx \quad \text{posto } \sqrt{x} = t \text{ ossia } x = t^2$$

differenziando ambo i membri si ha:

$$dx = 2tdt$$

nella variabile associata l'integrale si riscrive così:

$$\int \frac{2t}{t^2(t+1)} dt = 2\int \frac{dt}{t(t+1)}$$

seguendo il metodo delle funzioni fratte, fuori dal segno d'integrale si può scrivere:

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)}$$

per il principio d'identità dei polinomi si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

l'integrale si può riscrivere come:

$$2\int \frac{1}{t} dt - 2\int \frac{1}{t+1} dt = 2\ln|t| - 2\ln|t+1| + c = \ln x - \ln(\sqrt{x}+1)^2 + c$$

Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107 e-mail:santocalabrese@libero.it

V.O.
Determinare i valori di $x \in R$ per i quali la serie è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \; x^n$$

per rispondere al quesito si applichi il criteri del rapporto dei valori assoluti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \; \frac{n!}{n^2+1} \; |x| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{(n+1)n!} \quad \frac{n!}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} \; |x| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \; |x| = 0 \prec 1$$

pertanto la serie è convergente $\forall x \in R$